HORACE BRYON HEYWOOD

L'ÉQUATION DE FREDHOLM

ET SES APPLICATIONS A LA

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

L'ÉQUATION DE FREDHOLM

ET SES APPLICATIONS A LA

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR MM.

H. B. HEYWOOD
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LONDRES
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

M. FRÉCHET
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE POITIERS

AVEC UNE PRÉFACE ET UNE NOTE

DE

M. JACQUES HADAMARD
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6.

—

1912

PRÉFACE

La théorie des équations intégrales, née d'hier, est d'ores et déjà classique. Elle a fait son entrée dans plusieurs de nos enseignements. Nul doute que — peut-être à la faveur de nouveaux perfectionnements — elle ne s'impose bientôt à la pratique courante du calcul. C'est une fortune rare parmi les doctrines mathématiques, si souvent destinées à rester des objets de musée.

Ce sort exceptionnel est, cependant, à notre avis, conforme à la logique.

A mesure que, en Analyse, problèmes et méthodes tendent à perdre leur caractère formel et à dépasser le cercle des cas d'intégrabilité proprement dits, il semble bien que l'intégration et non plus la différentiation, doive apparaître comme l'élément simple — comme l'outil le plus usuel, parce que le plus puissant et le plus maniable — du calcul infinitésimal. L'intervention des équations intégrales dans l'étude des problèmes de la Physique mathématique est, au fond, une phase de cette évolution.

Il nous paraît souhaitable que celle-ci ait, dès à présent, sa répercussion sur l'enseignement. En tout cas, la belle méthode que l'on doit à M. Fredholm, marque un tel progrès qu'il importe de la rendre accessible non plus seulement aux futurs docteurs et à ceux qui poursuivront les examens d'ordre élevé, mais à tous ceux qui, à quelque degré que ce soit, étudient les mathématiques supérieures.

Une telle nécessité a été ressentie un peu partout, et, à l'étranger, d'excellents exposés, — tels que l'élégant traité de M. Böcher, pour n'en citer qu'un — ont été consacrés à la méthode qui nous occupe.

MM. Heywood et Fréchet, en abordant à leur tour le même sujet, ont visé à être clairs, élémentaires et pratiques. Ils ont retenu de la théorie tout ce qui a déjà acquis sa forme définitive et pratiquement utilisable, et se sont bornés à cet ensemble, déjà singulièrement fécond à lui seul et suffisant dans tous les cas usuels. Ils n'ont pas séparé

cette théorie des applications qui en sont la raison d'être et l'origine même, et qu'ils ont passées en revue avec grand soin. Grâce à l'œuvre ainsi conçue, nos étudiants pourront, tout en restant sûrs de ne pas être entraînés dans des difficultés inutiles, posséder aisément le nouvel instrument analytique.

Ils devront ce résultat à une collaboration internationale à laquelle on ne saurait trop applaudir. M. Heywood a été, il y a quelques années, notre hôte et l'auditeur assidu de nos cours parisiens. Il s'en est souvenu en prêtant cette fois son concours à un de nos jeunes mathématiciens dont le nom et le talent sont déjà assez connus pour que nous n'ayons pas à le présenter au lecteur, en vue d'une œuvre qui sera bonne et utile. C'est là une heureuse initiative : puisse-t-elle trouver de nombreux imitateurs !

Jacques HADAMARD.

L'ÉQUATION DE FREDHOLM
ET SES APPLICATIONS A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

INTRODUCTION

—

1. Caractère des questions traitées dans ce livre. — Les méthodes que nous allons développer s'appliquent surtout aux problèmes de Physique mathématique qui concernent les équations aux dérivées partielles du type elliptique (voir plus loin nº **1**, p. 14), dont le plus connu est le problème de Dirichlet (nº **4**, p. 17).

Dans la plupart des cas déjà étudiés, les problèmes en question se ramènent à une *équation de Fredholm*, c'est-à-dire à une équation de la forme

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{1}$$

où $\mathrm{K}(s,t)$ [1], $f(s)$ sont des fonctions connues. On cherche une fonction, $\varphi(s)$, qui satisfasse à cette équation. Le paramètre λ est introduit pour faciliter la discussion. Nous considérerons avec (1) l'équation *associée*

$$\psi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(t,s)\,\psi(t)\,dt = f(s). \tag{2}$$

Le Deuxième Chapitre sera consacré à la résolution de cette question, qui est effectuée par plusieurs méthodes distinctes donnant $\varphi(s)$ sous des formes différentes.

---

(1) On appelle cette fonction K le *noyau*.

La première méthode, celle d'itération, due à Neumann et Volterra, nous donne une série entière en λ, dont les coefficients sont des fonctions de s. Elle est valable pour les valeurs de λ plus petites en module qu'un certain nombre fixe.

La seconde méthode, celle de Fredholm, donne pour $\varphi(s)$ le rapport de deux fonctions entières en λ, c'est-à-dire une fonction méromorphe (voir p. 5) de λ. Ces fonctions sont obtenues sous la forme de séries entières dont les rayons de convergence sont *infinis*. Le numérateur du rapport a pour coefficients des puissances de λ, des fonctions de s qui résultent de l'intégration de certains déterminants. Le dénominateur est indépendant de s. La solution ainsi déterminée est *unique*. Il y a une difficulté pour les valeurs de λ qui sont pôles de cette fonction méromorphe ; la méthode montre que dans ce cas une solution n'existe pas en général, mais la méthode donne la solution dans les cas exceptionnels où elle existe.

Enfin une application convenable de la méthode — développée surtout par Hilbert et Schmidt — donne la solution cherchée sous une troisième forme, celle d'une série de *fonctions fondamentales*. Ces fonctions sont dans les cas ordinaires les solutions de l'équation *homogène*

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0.$$

Cette équation n'est satisfaite en général que par

$$\varphi(s) \equiv 0,$$

mais il existe une suite de nombres — *constantes caractéristiques* (ou *nombres fondamentaux* [1]))

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \dots \quad \lambda_n, \quad \dots$$

pour chacun desquels cette équation a une solution finie, soit,

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \quad \dots \quad \varphi_n(s), \quad \dots.$$

[1]) D'après M. GOURSAT.

Ce sont les *fonctions fondamentales.* La solution de l'équation (1) s'obtient alors sous la forme d'une série

$$\varphi(s) = \sum a_n \varphi_n(s).$$

Cette méthode a été appliquée jusqu'ici surtout dans le cas où $\mathrm{K}(s,t)$ est une fonction symétrique de s, t.

$$\mathrm{K}(s,t) \equiv \mathrm{K}(t,s);$$

(dans ce cas les deux équations *associées* coïncident) [1].

Il faut remarquer qu'il n'y a rien de nouveau dans la notion de fonction fondamentale, qui a eu son origine avec les séries trigonométriques de Fourier, et qui a occupé presque tous les grands géomètres qui ont depuis étudié la Physique. Notamment M. Poincaré, à qui est dû le terme *fonction fondamentale*, a publié plusieurs mémoires profonds, dans lesquels il a traité des questions de la théorie du potentiel au moyen de ces fonctions.

M. Hilbert [2] a appelé l'équation (1), une *équation intégrale de seconde espèce*, en réservant la désignation : *équation intégrale de première espèce* [3] pour l'équation

$$\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s). \tag{3}$$

L'équation

$$h(s)\,\varphi(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{4}$$

(1) Voir la note B, p. 161 pour le cas général.

(2) *Nachrichten... zu Göttingen*, 1904, n° **1**.

(3) La théorie de ces équations est beaucoup moins simple que celle des équations de deuxième espèce. En opérant comme au n° **6**, 2°, p. 43, on verrait facilement que même dans le cas simple où le noyau est de la forme $\sum_{q=1}^{q=p} \alpha_q(s)\beta_q(t)$, l'équation de première espèce n'a pas, en général, de solution.

qui se ramène immédiatement à (1) quand $h(s)$ n'a pas de zéros dans l'intervalle d'intégration, est dite *de troisième espèce* [1] dans le cas contraire.

Nous ne nous occuperons pas en général de ces deux dernières équations.

2. — Le but principal de ce livre est d'exposer cette théorie au point de vue des applications physiques. Nous avons pour cette raison énoncé au Premier Chapitre un certain nombre de problèmes de Physique qui conduisent à une équation de Fredholm. Ces problèmes reviennent en général à chercher une fonction analytique à l'intérieur d'un domaine fermé, qui satisfait à une équation aux dérivées partielles, et qui se réduit à une suite de valeurs données à la frontière de ce domaine.

Dans le Troisième Chapitre nous appliquerons à la résolution de ces problèmes les résultats du Deuxième Chapitre.

3. Cas de plusieurs variables. — L'équation (1) définit une fonction $\varphi(s)$ qui dépend d'une seule variable s : l'extension au cas de plusieurs variables est immédiate, et il n'y a aucune modification à faire dans les démonstrations pourvu qu'on astreigne la frontière de ce domaine d'intégration à des conditions de régularité convenables. En prenant par exemple le cas de deux variables, on a

$$\varphi(s_1, s_2) - \lambda \iint_{(\mathrm{D})} \mathrm{K}(s_1, s_2; t_1, t_2)\, \varphi(t_1, t_2)\, d(t_1, t_2) = f(s_1, s_2).$$

L'intégration s'étend à un domaine (D) dont un point est déterminé par les coordonnées (t_1, t_2) : (D) est aussi le domaine où sont définies les fonctions $\varphi(s_1, s_2)$, $f(s_1, s_2)$. Il nous arrivera pour abréger de dire que $\varphi(s_1, s_2)$, $f(s_1, s_2)$ sont deux fonctions du point M dont les coordonnées sont (s_1, s_2), et que $\mathrm{K}(s_1, s_2; t_1, t_2)$ est une fonction des deux points

(1) D. HILBERT, *Nachrichten... zu Göttingen*, 1906 ; E. PICARD, *Comptes Rendus*, 28 fév. 1910.

$\mathrm{M}(s_1, s_2)$, $\mathrm{P}(t_1, t_2)$: on écrira l'équation sous la forme

$$(1') \qquad \varphi(\mathrm{M}) - \lambda \int_{(\mathrm{D})} \mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \varphi(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} = f(\mathrm{M})$$

où $d\omega_{\mathrm{P}}$ désigne un élément d'aire de (D). Dans cette formule pour simplifier l'écriture nous convenons que le signe $\int$ désigne cette fois une intégration double.

4. Cas réel et cas complexe [1]**.** — Nous ne nous occuperons pas des variables complexes ; mais nous pouvons faire les remarques suivantes.

La méthode d'itération et la méthode de Fredholm s'appliquent au cas général où les fonctions $\mathrm{K}(s, t)$, $f(s)$ et le chemin d'intégration sont complexes.

La méthode et les résultats de Hilbert et de Schmidt ne s'appliquent pas toujours à ce cas général.

Lorsque les fonctions $\mathrm{K}(s, t)$, $f(s)$ sont réelles, et le chemin d'intégration réel, la solution et les fonctions fondamentales sont réelles. Les constantes caractéristiques sont réelles dans le cas *symétrique*, mais elles ne sont pas réelles en général.

Dans la suite de l'Introduction nous énonçons quelques définitions et propositions qui seront utiles plus tard.

Rappel de quelques définitions

5. — On dit qu'une fonction d'une ou de plusieurs variables $x, y, \ldots$ est *holomorphe près du point* $(x_0, y_0, \ldots)$, lorsqu'au voisinage de ce point on peut la représenter sous forme d'une série uniformément et absolument convergente de puissances entières croissantes de $x - x_0, y - y_0, \ldots$. Si la série reste absolument convergente quels que soient $x, y, \ldots$, on dira que la fonction est entière.

[1] On pourra sans inconvénient laisser de côté lors d'une première lecture tous les paragraphes imprimés en petit texte.

Lorsqu'une fonction est holomorphe près de tout point intérieur à un domaine D, on dit qu'elle est holomorphe dans D. Si la fonction, sans être holomorphe dans D, peut être considérée comme le quotient $\frac{f_1}{f_2}$ de deux fonctions holomorphes dans D, on dit qu'elle est *méromorphe dans* D. Une fonction méromorphe d'une variable λ est en général infinie pour certaines valeurs de λ appelées *pôles* de la fonction. On démontre que les points représentatifs de ces pôles sont en nombre fini dans toute aire bornée du plan complexe. Leurs valeurs sont racines du dénominateur f_2 et près de l'une quelconque d'entre elles, λ', on peut écrire la fonction sous la forme

$$f(\lambda) = \frac{\mathrm{A}_r}{(\lambda - \lambda')^r} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_1}{\lambda - \lambda'} + \varphi(\lambda) \tag{5}$$

où les A sont des constantes et où $\varphi(\lambda)$ est une fonction holomorphe près de λ'. La fraction rationnelle $f - \varphi$ est appelée la *partie principale* de f.

5bis. Théorème. — Soient $f(s,t)$, $g(s,t)$ deux fonctions bornées et intégrables dans le carré C : $a \leqslant (s,t) \leqslant b$, et qui sont continues dans C sauf peut-être en certains points disposés de façon qu'il n'y en ait jamais qu'un nombre fini ayant même abscisse s ou même ordonnée t. (Pour abréger, nous dirons d'une fonction qui possède toutes ces propriétés qu'elle est *continue presque partout* dans C). Je dis que la fonction

$$\mathrm{F}(s,t) = \int_a^b f(s,\tau)\, g(\tau,t)\, d\tau \tag{6}$$

est une fonction continue dans C.

Il suffit de prouver que, quel que soit le point (s,t) fixe dans C, à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre η tel que les inégalités

$$|s - s'| < \eta, \qquad |t - t'| < \eta$$

entraînent dans C

$$\left|\mathrm{F}(s',t') - \mathrm{F}(s,t)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Or s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un nombre $\varepsilon > 0$ tel que quel que soit n, il existe des valeurs s_n, t_n dans (a, b) pour lesquelles

$$|s - s_n| < \frac{1}{n}, \quad |t - t_n| < \frac{1}{n}, \quad \big|\mathrm{F}(s_n, t_n) - \mathrm{F}(s, t)\big| > \varepsilon.$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s_n, t_n) - \mathrm{F}(s, t) = &\int_a^b f(s_n, \tau)\big[g(\tau, t_n) - g(\tau, t)\big]\, d\tau \\ &+ \int_a^b g(\tau, t)\big[f(s_n, \tau) - f(s, \tau)\big]\, d\tau.\end{aligned}$$

Soient maintenant M, N les bornes supérieures de f et de g, on aura

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned}\big|\mathrm{F}(s_n, t_n) - \mathrm{F}(s, t)\big| \leqslant \mathrm{M} &\int_a^b \big|g(\tau, t_n) - g(\tau, t)\big|\, d\tau \\ + \mathrm{N} &\int_a^b \big|f(s_n, \tau) - f(s, \tau)\big|\, d\tau.\end{aligned}$$

Considérons le coefficient de M; il n'y a qu'un nombre fini q de points de discontinuité d'ordonnée t; soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q$ leurs abscisses. En dehors des intervalles $\left(\tau_i \pm \dfrac{\varepsilon}{16\mathrm{MN}q}\right)$, la fonction g est continue sur la droite d'ordonnée t par rapport à l'ensemble de ses deux variables et par conséquent uniformément continue. On peut donc prendre r indépendant de τ et assez grand pour que

$$\big|g(\tau, t_n) - g(\tau, t)\big| < \frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}(b - a)}$$

quand $n > r$, si τ n'est intérieur à aucun des intervalles précédents.

Il en résulte que la partie de la première intégrale de (7) relative aux intervalles $\left(\tau_i \pm \dfrac{\varepsilon}{16\mathrm{MN}q}\right)$ est inférieure à :

$$\frac{\varepsilon}{8\mathrm{MN}q} \times 2\mathrm{N} \times q = \frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}}$$

et la partie restante inférieure à

$$\frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}(b-a)} \times (b-a) = \frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}}.$$

D'où

$$\mathrm{M}\int_a^b \left|g(\tau,t_n) - g(\tau,t)\right| d\tau \leqslant \mathrm{M}\frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}} + \mathrm{M}\frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $n > r$. On aurait de même pour le second terme de (7) une inégalité analogue pour $n > r'$. Donc pour $n > r + r'$

$$\left|\mathrm{F}(s_n,t_n) - \mathrm{F}(s,t)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

contrairement à l'hypothèse.

Fonctions orthogonales

6. *Inégalité de Schwarz.* — Soient $f(s)$ et $\varphi(s)$ deux fonctions continues dans l'intervalle (a,b) et λ un paramètre numérique, on a évidemment :

$$0 \leqslant \int_a^b \left[f(s) + \lambda\varphi(s)\right]^2 ds$$
$$= \int_a^b \left[f(s)\right]^2 ds + 2\lambda\int_a^b f(s)\,\varphi(s)\,ds + \lambda^2\int_a^b \left[\varphi(s)\right]^2 ds.$$

En écrivant que le dernier membre est un trinôme en λ jamais négatif, on obtient l'inégalité de Schwarz

$$(8) \qquad \left[\int_a^b f(s)\,\varphi(s)\,ds\right]^2 \leqslant \int_a^b \left[f(s)\right]^2 ds \times \int_a^b \left[\varphi(s)\right]^2 ds.$$

On obtient de la même manière

$$(8') \qquad \left[\int_a^b\int_a^b \mathrm{F}(s,t)\,\Phi(s,t)\,ds\,dt\right]^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b \left[\mathrm{F}(s,t)\right]^2 ds\,dt \times \int_a^b\int_a^b \left[\Phi(s,t)\right]^2 ds\,dt.$$

7. *Fonctions orthogonales.* — On dit que deux fonctions continues $f(s)$, $\varphi(s)$ sont *orthogonales* dans un intervalle (a, b) si l'on a

$$\int_a^b f(s)\,\varphi(s)\,ds = 0.$$

Elles sont *normales* si

$$\int_a^b \bigl[f(s)\bigr]^2\,ds = 1 = \int_a^b \bigl[\varphi(s)\bigr]^2\,ds.$$

Il est facile de voir que si des fonctions continues

$$\varphi_1(s),\ \ \varphi_2(s),\ \ \ldots,\ \ \varphi_q(s),\ \ \ldots$$

sont normales et orthogonales (1), ces fonctions sont linéairement indépendantes. Autrement dit, une identité de la forme

$$c_1\,\varphi_1(s) + \ldots + c_q\,\varphi_q(s) + \ldots \equiv 0,$$

où les c sont des constantes et où le premier membre est, soit une somme d'un nombre limité de termes, soit une série uniformément convergente, n'est possible que si ces constantes sont toutes nulles. En effet, en multipliant par $\varphi_i(s)$ et intégrant, on a

$$\begin{aligned} 0 = c_1 \int_a^b \varphi_1(s)\,\varphi_i(s)\,ds + \ldots + c_i \int_a^b \bigl[\varphi_i(s)\bigr]^2\,ds + \ldots \\ + c_q \int_a^b \varphi_q(s)\,\varphi_i(s)\,ds + \ldots = c_i, \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, q, \ldots$.

---

(1) Comme exemple d'un tel système, on peut prendre : $\varphi_1(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_2(s) = \dfrac{\cos s}{\sqrt{\pi}}$, $\varphi_3(s) = \dfrac{\sin s}{\sqrt{\pi}}$, $\ldots, \varphi_{2n}(s) = \dfrac{\cos ns}{\sqrt{\pi}}$, $\varphi_{2n+1}(s) = \dfrac{\sin ns}{\sqrt{\pi}}$, …, avec $a = 0,\ b = 2\pi$.

8. *Normalisation.* — Étant donné un système de fonctions continues dans (a, b) et non identiquement nulles

$$f_1(s),\ f_2(s),\ \ldots,\ f_n(s),\ \ldots$$

en nombre fini ou non, on peut toujours *normaliser* ce système, c'est-à-dire trouver un système de fonctions continues dans (a, b)

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots$$

qui sont normales et orthogonales et telles que toute combinaison linéaire des $f(s)$ est une combinaison linéaire des $\varphi(s)$ et inversement.

En effet, supprimons de la suite des f, celles qui sont une combinaison linéaire des précédentes et nous serons ramenés au cas où les fonctions f sont linéairement indépendantes quand on en considère un nombre fini quelconque.

Supposons alors démontré qu'on peut trouver p combinaisons linéaires de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, qui sont normales et orthogonales entre elles. Ce sera aussi vrai quand on remplace p par $p+1$. En effet, formons

$$\varphi_{p+1} \equiv c_1\,\varphi_1 + \ldots + c_p\,\varphi_p + c_{p+1}\,f_{p+1} \tag{9}$$

ce sera une combinaison linéaire des f. Elle sera orthogonale à $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ si l'on a

$$0 = \int_a^b \varphi_{p+1}(s)\,\varphi_k(s)\,ds = c_k + c_{p+1}\int_a^b f_{p+1}(s)\,\varphi_k(s)\,ds, \quad (k = 1, \ldots, p).$$

D'où

$$\varphi_{p+1} \equiv c_{p+1}\big[f_{p+1} - \sum_1^p \varphi_k(s)\int_a^b f_{p+1}(s)\,\varphi_k(s)\,ds\big].$$

Le crochet n'est pas identiquement nul, sans quoi f_{p+1} serait une combinaison linéaire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ et par suite de $f_1, f_2, \ldots, f_p$ ce qui serait contraire à l'hypothèse. Alors, on pourra évidemment

choisir c_{p+1} de façon que φ_{p+1} soit normale, ce qui démontre notre remarque. Or celle-ci admise pour p fonctions est vraie pour une ; elle est donc générale. Le théorème est alors démontré, car les fonctions orthogonales et normales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont nécessairement indépendantes, et, non seulement elles sont bien des combinaisons linéaires des f, mais d'après (9), les f sont aussi des combinaisons linéaires des φ. De plus nous voyons que si les f sont linéairement indépendantes, le nombre des φ sera égal à celui des f, en particulier s'il y a une infinité de fonctions f, il y aura une infinité de fonctions φ.

9. *Constantes de Fourier généralisées.* — Considérons un système *normé*, c'est-à-dire un système de fonctions normales et orthogonales entre elles

$$\varphi_1(s),\ \ \varphi_2(s),\ \ \varphi_3(s),\ \ \ldots.$$

Il est facile de voir qu'une fonction $\mathrm{F}(s)$ qui peut être considérée comme une combinaison linéaire d'un nombre fini ou non de fonctions de ce système ne peut être exprimée ainsi de plus d'une façon. D'une manière précise si la série

$$d_1\,\varphi_1(s) + d_2\,\varphi_2(s) + \ldots + d_n\,\varphi_n(s) + \ldots$$

est composée d'un nombre fini de termes ou converge uniformément, les coefficients supposés constants $d_1, d_2, \ldots$ sont bien déterminés par la somme $\mathrm{F}(s)$ de cette série. En effet, en multipliant par $\varphi_n(s)$ et intégrant, on aura

$$d_n = \int_a^b \mathrm{F}(s)\,\varphi_n(s)\,ds.$$

Par analogie avec ce qui se passe dans les développements trigonométriques, nous nommerons les d_n, les constantes de Fourier de $\mathrm{F}(s)$ relativement au système des φ_n.

10. *Inégalité de Bessel.* — Soit $\mathrm{F}(s)$ une fonction continue dans (a, b) et

$$\varphi_1,\ \ \varphi_2,\ \ \ldots$$

un système de fonctions continues normales et orthogonales dans (a, b). Posons

$$\alpha_p = \int_a^b \mathrm{F}(s)\,\varphi_p(s)\,ds. \tag{10}$$

On aura

$$\begin{aligned}\int_a^b \Big[\mathrm{F}(s) - \sum \alpha_p\,\varphi_p(s)\Big]^2 ds &= \int_a^b \big[\mathrm{F}(s)\big]^2\,ds - 2\sum \alpha_p \int_a^b \mathrm{F}(s)\,\varphi_p(s)\,ds \\ &\quad + \sum \alpha_p^2 \int_a^b \varphi_p^2(s)\,ds + 2\sum \alpha_p\alpha_r \int_a^b \varphi_p(s)\,\varphi_r(s)\,ds \\ &= \int_a^b \big[\mathrm{F}(s)\big]^2\,ds - \sum \alpha_p^2.\end{aligned}$$

D'où une formule importante

$$\sum \alpha_p^2 = \int_a^b \big[\mathrm{F}(s)\big]^2 ds - \int_a^b \big[\mathrm{F}(s) - \sum \alpha_p\,\varphi_p(s)\big]^2 ds.$$

En particulier on a l'inégalité de Bessel

$$\sum \alpha_p^2 \leqslant \int_a^b \big[\mathrm{F}(s)\big]^2\,ds, \tag{11}$$

où les α_p sont les constantes de Fourier (10) de $\mathrm{F}(s)$ relativement aux $\varphi(s)$.

Il en résulte que si les φ_p sont en nombre infini, la série $\sum_{p=1}^{p=\infty} \alpha_p^2$ sera convergente et inférieure ou égale à $\int_a^b \big[\mathrm{F}(s)\big]^2\,ds$.

11. — On peut en tirer avec M. Schmidt la conséquence suivante.

Les constantes de Fourier d'une fonction continue de deux variables $\mathrm{H}(s, t)$ où l'on considère t comme constant, sont des fonctions de t : $\beta_p(t)$. Je dis que si $\mathrm{H}(s, t)$ est une fonction symétrique, la série

$$\sum \alpha_p\,\beta_p(t) \equiv \sum \int_a^b \mathrm{F}(s)\,\varphi_p(s)\,ds \int_a^b \mathrm{H}(s, t)\,\varphi_p(s)\,ds$$

est absolument et uniformément convergente quand t varie dans (a, b). En effet, on a

$$\mathrm{J} = \sum_{p=n}^{p=n+m} \left[\alpha_p \, \beta_p(t)\right] = \int_a^b \left[\sum_{p=n}^{p=n+m} \alpha_p \, \varphi_p(s)\right] \left[\sum_{p=n}^{p=n+m} \beta_p(t) \, \varphi_p(s)\right] ds$$

puisque les φ forment un système normé. D'après les inégalités de Schwarz et de Bessel, appliquées au dernier membre, on a

$$\mathrm{J}^2 \leqslant \left[\sum_{p=n}^{p=n+m} \alpha_p^2\right] \times \int_a^b \left[\mathrm{H}(s,t)\right]^2 ds.$$

Mais la fonction $\mathrm{H}(s, t)$ étant continue, la seconde intégrale a un maximum M lorsque t varie dans (a, b). On a donc :

$$\sum_{p=n}^{p=n+m} \left|\alpha_p \, \beta_p(t)\right| \leqslant |\mathrm{J}| \leqslant \sqrt{\mathrm{M} \sum_{p=n}^{p=\infty} \alpha_p^2}.$$

Comme la série $\sum \alpha_p^2$ est convergente, le second membre (et par conséquent le premier membre) peut être rendu aussi petit que l'on veut, en prenant n assez grand et m quelconque, de sorte que la proposition est démontrée (voir la note [1], p. 102).

CHAPITRE PREMIER

—

PROBLÈMES SE RAMENANT A L'ÉQUATION DE FREDHOLM

I. — PROBLÈMES DE POTENTIEL

1. Fonctions harmoniques (1). — On dit qu'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre (2)

$$\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i a_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + lV = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

appartient au type *elliptique*, ou encore, est à *caractéristiques* (2) imaginaires, si la forme quadratique

$$\sum_{i,k} a_{ik} X_i X_k$$

(obtenue en remplaçant, dans les termes du second ordre, chaque dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}$ par un produit de deux indéterminées X_i, X_k) est *définie*, c'est-à-dire se compose d'autant de carrés indépendants et tous de même signe qu'il y a de variables.

La plus simple et la plus connue des équations du type elliptique est l'équation de *Laplace* ou *équation des potentiels*.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta V = 0 \tag{1}$$

---

(1) Hadamard, *Propagation des Ondes*, ch. I.
(2) Hadamard, *Ibid.* Chap. VII, § 3.

On appelle *fonction harmonique dans un domaine* D à trois dimensions toute solution de cette équation analytique[1] dans le domaine D.

Dans le cas où D est illimité, il faut de plus que le rapport de V à $\frac{1}{\mathrm{R}}$, R étant la distance de l'origine, reste inférieur en module à un nombre donné $\Big($ainsi que le rapport de chacune des dérivées partielles $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}$ à $\frac{1}{\mathrm{R}^2}\Big)$.

2. Potentiel. — Les fonctions suivantes sont harmoniques en dehors des masses attirantes :

1° Le potentiel d'une distribution spatiale

$$\mathrm{V(M)} = \iiint \frac{\rho(\mathrm{P})}{r}\, dx\, dy\, dz. \tag{2}$$

2° Le potentiel d'une simple couche étalée sur une surface S,

$$\mathrm{U(M)} = \iint \frac{\rho(\mathrm{P})}{r}\, d\mathrm{S}. \tag{3}$$

3° Le potentiel d'une double couche,

$$\mathrm{W(M)} = \iint \rho(\mathrm{P}) \left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\mathrm{S} = \iint \rho(\mathrm{P})\, \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\mathrm{S} \tag{4}$$

où M désigne le point dont on considère le potentiel, P, un point attaché à un élément de masse, $r = \mathrm{MP}$ et où φ est l'angle de PM et de la normale à la surface S au point P, dirigée vers l'intérieur (fig. 1).

On suppose que S a partout un plan tangent unique ; la masse attirante est supposée être située à une distance finie de l'origine. La densité ρ est une fonction finie et intégrable : elle peut être discontinue.

---

[1] Il suffit de supposer l'existence de V et de ses dérivées premières et secondes.

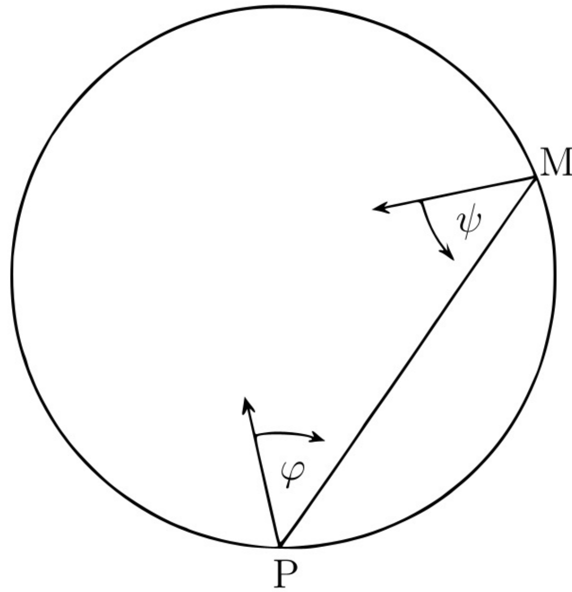


Fig. 1.

A l'intérieur des masses attirantes, on a la formule de Poisson

$$(2^{\text{bis}}) \qquad \Delta V = -4\pi\,\rho.$$

3. Continuité du potentiel.—Dans ces conditions :

1° Le potentiel d'une distribution spatiale est partout continu, ainsi que sa dérivée première. Sa dérivée seconde a en général des discontinuités aux points où ρ est discontinu.

2° Le potentiel d'une simple couche est continu et nul à l'infini. Sa dérivée première (continue ailleurs) a des discontinuités sur la surface S, sur laquelle les équations suivantes sont satisfaites,



$$(5) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n_e} - \frac{\partial V}{\partial n_i}\right) = 2\pi\rho(M),$$

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial n_e} + \frac{\partial V}{\partial n_i}\right) = \int_S \rho(P)\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\sigma.$$

Ici l'indice e signifie que $\dfrac{\partial V}{\partial n_e}$ est la limite du rapport $\dfrac{V_Q - V_M}{MQ}$ lorsqu'en partant d'un point Q sur la normale, extérieur à la surface, on s'approche du point M de la surface le long de la normale. L'indice i

signifie qu'on prend la même limite lorsque le point Q est intérieur à la surface. Le signe $\int$ désigne une intégrale double étendue à la surface S, dont $d\sigma$ est l'élément d'aire. ψ est l'angle de MP et de la normale à M.

3° Le potentiel d'une double couche (continu ailleurs) a des discontinuités sur la surface S. Il est nul à l'infini et satisfait aux équations suivantes :

$$\frac{1}{2}(\mathrm{W}_i - \mathrm{W}_e) = 2\pi\,\rho(\mathrm{M}), \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{W}_i + \mathrm{W}_e) = \int_{\mathrm{S}} \rho(\mathrm{P})\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\mathrm{S}. \tag{8}$$

4. Problèmes relatifs aux fonctions harmoniques. — Le problème de déterminer une fonction V harmonique dans un domaine D extérieur ou intérieur à une surface S et satisfaisant à diverses conditions sur la surface S de ce domaine a une importance capitale.

Il est nommé suivant les différents cas :

1° *Problème de Dirichlet.* — On impose à la fonction V cherchée la condition d'être égale sur S à une fonction donnée sur S

$$\mathrm{V}_{\mathrm{S}} = f(\mathrm{M}). \tag{9}$$

2° *Problème de Neumann.* — On donne sur S non plus les valeurs de V mais celle de $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_{\mathrm{S}}} = g(\mathrm{M}). \tag{10}$$

3° *Problème de la chaleur.* — L'expression $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + p\mathrm{V}$ est donnée sur S, p étant une fonction donnée de M

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_{\mathrm{S}}} + p(\mathrm{M})\,\mathrm{V}_{\mathrm{S}} = h(\mathrm{M}). \tag{11}$$

La condition

$$q\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + p\,\mathrm{V} = h(\mathrm{M})$$

se ramène à la précédente tant que $q \neq 0$.

Le mot «problème mixte» s'applique à un problème qu'on rencontre en particulier en Hydrodynamique et correspond à $q = 0$ sur une partie de la surface, et $p = 0$ sur l'autre [1].

A chacune de ces conditions correspondent deux problèmes distincts — intérieur et extérieur.

5. Problèmes généralisés. — Sont presque aussi importants que les précédents, les problèmes qui consistent à trouver non une fonction harmonique, c'est-à-dire une solution analytique de

$$\Delta \mathrm{V} = 0$$

mais une solution analytique de

$$\Delta \mathrm{V} = \varphi(\mathrm{M}) \tag{12}$$

satisfaisant à l'une des conditions 1°, 2°, 3° sur une surface S.

Ces problèmes se ramènent aux précédents. Cherchons, en effet, une solution V de

$$\Delta \mathrm{V} = \varphi(x, y, z)$$

dans un domaine D, qui, sur la frontière S de ce domaine, satisfait à la condition

$$\mathrm{V} = f(\mathrm{M}).$$

Pour cela il suffit de trouver deux fonctions V_1 et V_2 telles qu'on ait

$$\textit{dans } \mathrm{D} \begin{cases} \Delta \mathrm{V}_1 = \varphi(x, y, z) \\ \Delta \mathrm{V}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \textit{sur } \mathrm{S} : \mathrm{V}_2 = f(\mathrm{M}) - \mathrm{V}_1(\mathrm{M}).$$

---

(1) HADAMARD, *Propagation des ondes.*

La solution sera

$$V = V_1 + V_2.$$

Or, grâce à la formule de Poisson (2bis), on a tout de suite une solution en V_1

$$V_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_D \varphi(P) \, \frac{1}{r} \, d\omega_P$$

où $r = MP$. (Dans le cas du problème plan, on remplacerait $\frac{1}{r}$ par $\log r$).

Et la recherche de V_2 revient au problème de Dirichlet.

Les deux autres problèmes correspondant au problème de Neumann, au problème de la chaleur et au problème mixte se traitent d'une manière analogue.

6. Problèmes de physique mathématique correspondant aux précédents. 1° *Attraction newtonienne et électrostatique.* — Chacun des cas du n° **4** correspond à un problème de ces théories. On peut mentionner [1] celui de trouver le potentiel à l'extérieur ou à l'intérieur d'un conducteur sur lequel s'étale une charge donnée. Le problème revient à chercher une fonction harmonique dans D et égale sur sa frontière à une constante donnée.

Le cas où il y a plusieurs conducteurs auxquels on communique différentes charges se réduit au cas précédent. On peut en effet considérer les différents conducteurs comme une seule surface multiconnexe.

On peut mentionner aussi le problème des marées [2]. On considère la terre comme une sphère dont certaines parties, correspondant aux mers, sont conductrices. Cette sphère est placée dans un champ qui est produit par les attractions des astres, et par la rotation de la

---

(1) O. D. Chwolson, *Traité de Physique* (traduit par Davaux), 1910, Paris. Tome IV, *Champ électrique constant*, p. 129.

(2) Darwin, *Philos. Trans.*, 1879, pp. 447, 539 ; 1880 (II), p. 713 ; 1881 (II), p. 491 ; 1887, p. 379.

terre elle-même (force centrifuge). La densité électrique sur la sphère correspond à la hauteur des marées (¹).

2° *Magnétisme.* — La fonction V peut également être un potentiel magnétique, et l'on peut traiter le problème de l'aimantation par influence (²). La Physique nous donne une relation entre la force magnétique extérieure et intérieure sur la surface du corps aimanté

$$(1 + 4\pi k)\,\frac{\partial V}{\partial n_i} - \frac{\partial V}{\partial n_e} = \text{fonction donnée},$$

k étant le coefficient d'aimantation.

Ce problème diffère un peu des problèmes des n^os **4** et **5**, nous verrons dans le n° **9** qu'on le résout de la même manière.

3° *L'hydrodynamique.* — La fonction V est maintenant le potentiel permanent des vitesses (³). Le problème du mouvement irrotationnel d'un liquide dans un vase fermé immobile que ce liquide est supposé remplir exactement correspond à la condition

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0.$$

Si les parois du vase se déplacent (le vase restant toujours complètement plein), on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \text{fonction donnée}.$$

Le mouvement des parois est assujetti à la condition que le volume du liquide reste constant, de sorte qu'on a

$$\int_S \frac{dV}{dn}\,dS = 0.$$

(¹) Poincaré, *Journal de Mathématiques*, 1897.
(²) Mascart et Joubert, *Electricité et Magnétisme*, t. I, § 270.
(³) Appell, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 325, 327.

On obtiendrait un problème différent, cas particulier du problème de Dirichlet, en supposant que la direction de la vitesse en chaque point d'une surface fermée est normale à cette surface. Celle-ci devant être alors une surface de niveau, cela revient à se donner

$$\mathrm{V} = \text{constante sur la surface.}$$

Si enfin on a affaire à un liquide présentant une surface libre, on doit déterminer V en se donnant ses valeurs sur *une partie* d'une surface et celles de $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}$ sur l'*autre partie*. Ce cas se ramène donc au problème mixte.

4° *Elastostatique.* — Considérons le cas d'une petite déformation d'un corps de forme donnée, et supposons que cette déformation dérive d'un potentiel V [1]. On a

$$\Delta \mathrm{V} = \theta$$

où θ est la dilatation. Si des forces données agissent sur la surface on connaîtra $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}$. La fonction $\theta(x, y, z)$ sera donnée par la force de masse. On a donc un cas du problème généralisé. Par contre, le problème est notablement plus difficile lorsqu'on ne fait pas sur la solution l'hypothèse précédente.

5° *Théorie de la chaleur.* — Le problème d'un corps en équilibre

(1) Soit (x, y, z), $(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$ les coordonnées d'un point P du corps *avant* et *après* la déformation due à l'action des forces de masse et des forces de surface. Notre hypothèse s'exprime par les relations :

$$\xi = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}.$$

La dilatation θ est le rapport de l'accroissement de volume au volume primitif : on a :

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \Delta \mathrm{V}.$$

V. Appell, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 805.

de température avec rayonnement (1) nous donne le problème du n° **4** avec la condition

$$k\mathrm{V} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i} = \text{fonction donnée.}$$

C'est la loi de Newton.

7. — Relativement à chacun des problèmes des n^{os} **5** et **6** se posent deux questions préliminaires. Est-ce qu'une solution existe ? Si elle existe, est-elle unique ? La méthode donne une réponse très nette à chacune de ces questions.

Il faut remarquer que la Physique résout ces questions dans les cas cités au n° **6**. Il est physiquement évident que les divers équilibres proposés seront réalisés, et qu'ils ne seront réalisés que d'une seule manière. Mais cette réponse ne suffit pas au point de vue mathématique et nous aurons à la compléter. Pour cela, il nous sera souvent commode d'utiliser la notion de fonction de Green.

8. Fonction de Green. — Soient M, P deux points du domaine D : envisageons la fonction des deux points, $\frac{1}{r} = \frac{1}{\mathrm{MP}}$ (2).

Considérée comme fonction de P, elle est analytique en tout point sauf en M, et si M n'est pas sur la surface S, elle prend des valeurs déterminées en tout point de cette surface.

Imaginons qu'on puisse construire une fonction ϖ harmonique dans le domaine D (limité par S et intérieur ou extérieur à S) et prenant sur la surface S les valeurs $\frac{1}{\mathrm{MP}} = \frac{1}{r_{\mathrm{S}}}$, M étant pour le moment un point fixe. Ceci revient à la solution d'un problème de Dirichlet de l'espèce indiquée au n° **4**, p. 17.

(1) Boussinesq, *Théorie analytique de la Chaleur*, t. II. — Chwolson, *loc. cit.*, t. III, p. 303 et 331.

(2) Dans tout ce numéro, on devra remplacer $\frac{1}{r}$ par $\log\frac{1}{r}$ pour obtenir le cas du plan ; il faudra en outre remplacer 4π par 2π dans la formule (13).

La fonction harmonique de P

$$\frac{1}{r} - \varpi = \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$$

qui s'annule sur S et qui a une singularité au point M s'appelle *fonction de Green relative à* D.

Elle est symétrique en M et P, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \mathfrak{G}(\mathrm{P}, \mathrm{M}).$$

Dans le cas où M et P se trouvent à la fois sur la surface, la fonction $\mathfrak{G}$ s'annule également, pourvu que les deux points ne coïncident pas.

On démontre d'ailleurs qu'une fois connue la fonction de Green la résolution du problème de Dirichlet s'ensuivrait. Mais nous n'utiliserons pas ce fait.

Au contraire, nous nous servirons d'une autre propriété remarquable exprimée par la formule

$$\Delta \int_{\mathrm{D}} f(\mathrm{P})\, \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} = -4\pi f(\mathrm{M}), \tag{13}$$

dans laquelle $f(\mathrm{M})$ est une fonction finie quelconque ayant des dérivées-premières et où le signe $\int$ désigne une intégration triple effectuée dans le domaine D dont l'élément de volume est $d\omega_{\mathrm{P}}$.

Pour démontrer cette relation, on écrit le premier membre sous la forme

$$\Delta \int_{\mathrm{D}} \frac{1}{r} f(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} - \Delta \int_{\mathrm{D}} \varpi(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \cdot f(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}}.$$

La seconde expression s'évanouit, puisque ϖ est harmonique.

La première intégrale est le potentiel d'une distribution de matière de densité $f(\mathrm{P})$.

Donc le premier membre de (13) est bien égal à

$$-4\pi\, f(\mathrm{M})$$

à cause de l'équation de Poisson (2bis), p. 15, à laquelle satisfait la première intégrale, pourvu que $f(\mathrm{M})$ possède des dérivées premières

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Enfin nous établirons aussi la propriété suivante :

L'intégrale

$$\int_{\mathrm{D}} f(\mathrm{P})\,\mathfrak{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} \tag{14}$$

s'annule lorsque M s'approche de la surface.

En effet, tous les éléments de cette intégrale s'annulent sauf celui qui contient le point M.

Prenons un point A sur la surface (fig. 2) et autour de A décrivons deux sphères c_1, c_2 de rayons r_1, r_2. Considérons la partie de l'intégrale qui s'étend à l'espace Σ entre ces deux sphères et la surface S (1).

Soit M un point situé à une distance de A plus petite que $\frac{r_1}{2}$.

La fonction harmonique ϖ n'a ni maximum ni minimum, et elle est égale à $\frac{1}{r}$ sur S ; par suite elle reste comprise entre le maximum et le minimum de $\frac{1}{r}$ sur la surface. Elle est donc positive.

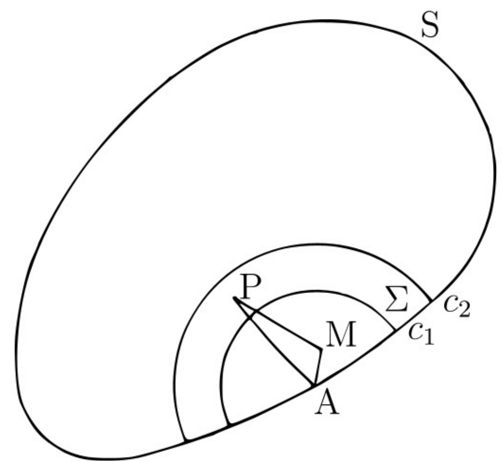


Fig. 2.

D'autre part $\mathfrak{G} = \frac{1}{r} - \varpi$ est une fonction de P harmonique, sauf au point M, qui s'annule sur S, et qui est sûrement positive au voisinage de M. En traçant autour de M une sphère très petite, on voit qu'entre cette sphère et S, $\mathfrak{G}$ a un maximum positif sur cette sphère et un minimum nul sur S. Par conséquent, $\mathfrak{G}$ est positive partout, et, puisque $\varpi > 0$, elle est en

(1) Nous avons substitué dans la figure 2, «contour et aire renfermés» à «surface et volume renfermés».

module plus petite que $\frac{1}{r}$. Si K est le maximum de $f(\mathrm{P})$ dans D, on a donc :

$$\left|\int_\varepsilon f(\mathrm{P})\,\mathfrak{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,d\omega_\mathrm{P}\right| < \mathrm{K}\int_\varepsilon \frac{1}{r}\,d\omega_\mathrm{P}, \tag{15}$$

ε étant une partie quelconque de D.

Il faut démontrer que l'intégrale (14) tend vers zéro quand le point M s'approche d'un point A du bord. Choisissons d'abord un petit nombre positif ε. Nous allons démontrer qu'on peut prendre le point M assez près de A (fig. 2) pour que l'intégrale (14) soit plus petite que ε.

Autour de A décrivons une petite sphère c_1 de rayon ρ. Soit M à l'intérieur de cette sphère. Nous pouvons choisir le rayon ρ tel que l'intégrale $\int \frac{1}{r}\,d\omega_\mathrm{P}$ étendue à l'intérieur d'une sphère c_2 de centre M et de rayon 2ρ soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$, r étant la distance entre le point P et le centre. En effet cette dernière intégrale est égale à

$$\int_0^{2\rho} \frac{1}{r} \cdot 4\pi r^2\,dr = 8\pi\rho^2.$$

Remarquons que ρ étant ainsi choisi et fixé, la sphère fixe c_1 reste tout entière comprise dans la sphère variable c_2, si M est à l'intérieur de la sphère fixe c_1 décrite autour de A. L'intégrale (15) relative à la partie ε du domaine D à l'intérieur de cette sphère fixe c_1 sera donc plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$. Les éléments de l'intégrale (15) extérieurs à la sphère c_1 sont finis et ils tendent vers zéro lorsque M s'approche du bord, c_1 restant fixe. Donc on peut rendre le reste de l'intégrale (11) plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$ en faisant tendre M vers A.

Donc on peut rendre l'intégrale (11) plus petite que $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Nous venons de traiter un cas de la fonction de Green, dont l'existence dépend de la résolution du problème intérieur de Dirichlet. Il y a aussi à considérer la fonction de Green relative à l'extérieur

d'une surface, et ensuite des fonctions analogues pour les conditions

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n} = 0$$

sur la surface et

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n} + p(\mathrm{M})\,\mathfrak{G} = 0$$

sur la surface pour les cas extérieur et intérieur. Pour approfondir cette question nous avons besoin des résultats du Deuxième Chapitre. Nous reconnaîtrons (n° **14**, p. 132) à l'aide de ces résultats que des fonctions de Green satisfaisant à ces conditions n'existent pas dans *tous* les cas. Dans les numéros suivants (n° **13**, p. 30) nous indiquerons l'emploi de certaines de ces fonctions de Green.

9. La mise en équation. — Nous allons maintenant montrer comment à une exception près (§ 4°, p. 21) les problèmes précédents se ramènent aisément à des équations de Fredholm, c'est-à-dire de la forme (1′), p. 4. Envisageons d'abord le problème 1° du n° **4**, c'est-à-dire le problème de Dirichlet. Nous le remplacerons par un problème plus général :

Trouver une fonction V harmonique dans tout l'espace (sauf sur la surface S) et qui sur la surface S satisfait à la condition

$$\mathrm{V}_i + \mu \mathrm{V}_e = \mu f(\mathrm{M}), \tag{16}$$

où μ est un paramètre arbitraire.

Pour $\mu = 0$, nous avons le problème intérieur ; pour $\mu = \infty$, le problème extérieur.

Remarquons maintenant que, étant donnée une distribution de matière, une intégration suffit pour déterminer son potentiel. Donc si nous pouvons déterminer une distribution dont le potentiel satisfait à notre condition, le problème sera résolu. Nous chercherons *une double couche*[1] *de densité* ρ *étalée sur* S *et dont le potentiel* W (= V) *satisfait*

à la condition (16).

Les équations (7) et (8) sont maintenant satisfaites. Et si nous substituons dans l'équation (16) les expressions de V_i $(= W_i)$ et de V_e $(= W_e)$ tirées de (7) et (8) nous aurons une équation renfermant la densité ρ cherchée.

$$2\pi\,\rho(\mathrm{M}) + \lambda \int \rho(\mathrm{P})\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\,d\mathrm{S} = f_1(\mathrm{M}) \tag{17}$$

où

$$\lambda = \frac{1+\mu}{1-\mu}, \qquad f_1(\mathrm{M}) = \frac{\mu}{1-\mu}\,f(\mathrm{M}).$$

C'est une équation de Fredholm (n° **1**, p. 1) dont le *noyau* (note ([1]), p. 1) est $-\dfrac{\cos\varphi}{2\pi r^2}$, fonction des deux points P, M. Si nous pouvons résoudre cette équation, nous aurons une densité ρ qui nous conduira immédiatement à la solution du problème posé.

Les valeurs $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ du paramètre correspondent aux cas *intérieur* et *extérieur* respectivement.

Le problème 2°, celui de Neumann, se traite d'une manière analogue.

Nous le remplaçons par le problème plus général où on a la condition

$$\mu\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_e} = \mu\,g(\mathrm{M}). \tag{18}$$

Cherchons une *simple couche* ρ *étalée sur* S *et dont le potentiel satisfasse à cette condition*. En nous servant des équations (5) et (6) nous trouvons que ρ doit satisfaire à l'équation de Fredholm suivante

$$2\pi\,\rho(\mathrm{M}) + \lambda \int \rho(\mathrm{P})\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\mathrm{S} = f_1(\mathrm{M}), \tag{19}$$

([1]) On pourrait se demander pourquoi nous choisissons une *double couche*. C'est que cette espèce de distribution nous permet d'appliquer la méthode de Fredholm. En représentant V par un potentiel de simple couche, on serait conduit à une équation de première espèce (voir n° **1**, p. 3).

où

$$f_1(\mathrm{M}) = \frac{\mu}{1-\mu}\, g(\mathrm{M})$$

et λ a la même expression qu'avant.

Le noyau est maintenant $-\dfrac{\cos\psi}{2\pi r^2}$: et l'on voit que l'équation (19) est *associée* (p. 1) à l'équation (17).

Les valeurs $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ du paramètre correspondent aux cas *extérieur* et *intérieur* respectivement.

Nous arrivons maintenant à 3°, le problème de la chaleur. Cherchons une simple couche dont le potentiel remplit la condition (11).

En employant les équations (3), (5) et (6) nous avons l'équation intégrale

$$(19^{\text{bis}}) \qquad 2\pi\,\rho(\mathrm{M}) - \lambda\int \rho(\mathrm{P})\left[\frac{\cos\psi}{r^2} + \frac{p(\mathrm{M})}{r}\right] d\mathrm{S} = h_1(\mathrm{M}),$$

où $h_1 = -\lambda h$ et $\lambda = +1, -1$, selon que nous sommes dans le cas intérieur ou le cas extérieur.

[L'équation (19bis) correspond à la condition

$$\frac{1}{2}(1+\lambda)\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i} + \frac{1}{2}(\lambda-1)\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_e} + \lambda\,\rho(\mathrm{M})\,\mathrm{V}(\mathrm{M}) = \lambda h(\mathrm{M}).]$$

Cette méthode ne s'applique d'ailleurs pas au cas où la quantité appelée plus haut q (n° **4**, p. 17) s'annule et par conséquent pas non plus au problème mixte.

10. Cas de deux dimensions. — Tout ce qui précède s'applique au cas de deux dimensions mot pour mot, si l'on substitue $\log\dfrac{1}{r}$ à $\dfrac{1}{r}$. Les problèmes qu'on se propose sont identiques, et ils conduisent à des équations fonctionnelles analogues. On forme de la même façon les fonctions de Green pour un contour plan.

II. — PROBLÈMES RELATIFS À L'ÉQUATION $\Delta V = R(x, y, z)V$ ET À DES ÉQUATIONS ANALOGUES

11. Les problèmes envisagés. — Nous nous occuperons dans cet article des problèmes qui consistent à trouver une solution de l'équation (également elliptique)

$$\Delta V = R(x, y, z)V \tag{20}$$

ou bien de l'équation plus générale

$$\Delta V = R(x, y, z)V + R_1(x, y, z) \tag{21}$$

où $R(x, y, z)$, $R_1(x, y, z)$ sont des fonctions finies, ayant des dérivées premières (R gardant toujours le même signe), cette solution étant assujettie à l'une des trois conditions de Neumann, de Dirichlet, de la chaleur, indiquées dans le n° **4**.

La résolution de ces problèmes nous permettra (n° **19**, Ch. III, p. 140) de traiter une autre catégorie de questions, celles qui consistent à trouver une solution de

$$\Delta V = R(x, y, z)\,\frac{\partial V}{\partial t} \tag{22}$$

ou bien de

$$\Delta V = R(x, y, z)\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{23}$$

satisfaisant à l'une des conditions précédentes sur la surface, et satisfaisant à des conditions initiales.

Enfin nous montrerons (n° **24**, p. 152) que la même méthode s'applique à l'équation générale elliptique à deux variables indépendantes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a\,\frac{\partial V}{\partial x} + b\,\frac{\partial V}{\partial y} + cV = f$$

où a, b, c, f sont des fonctions données de x, y (c'est-à-dire de M).

12. Problèmes de Physique correspondants. 1° *Acoustique* (1). — Problème des ondes sonores. La fonction V est le potentiel des vitesses : elle satisfait à l'équation (23). La constante R dépend de la densité et du coefficient d'élasticité du gaz. Donner la vitesse normale autour de la surface revient à donner $\frac{\partial V}{\partial n}$. Supposer que la vitesse est normale revient à se donner V.

2° *Elasticité* (1). — Pour le problème des petites vibrations d'un corps élastique, on a les mêmes équations que dans le 1°. La fonction V est la dilatation.

3° *Chaleur* (2). — Pour le problème du refroidissement d'un corps, nous avons l'équation (22) où V représente la température. La fonction R est le rapport de la chaleur spécifique au coefficient de conductibilité. Si la température à la surface est connue, nous avons

$$V = \text{fonction donnée sur la surface.}$$

Si on donne le flux, nous avons

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \text{fonction donnée sur la surface.}$$

S'il y a de la radiation, nous avons

$$R\frac{\partial V}{\partial n} - V = \text{fonction donnée sur la surface}$$

d'après la loi de Newton, où R est fonction des points de la surface.

13. Mise en équation. — Considérons d'abord l'équation (20) et soit $\mathfrak{G}(M, P)$ la fonction de Green correspondant à la condition

$$V = 0 \qquad \text{sur la surface.} \tag{24}$$

(1) Lord RAYLEIGH. — *Theory of Sound.* Vol. II, nos 241–244 et n° 374 ; O. D. CHWOLSON. — *Traité de Physique* (traduit par E. Davaux). *Acoustique*, p. 103 ; A. WINKELMANN. — *Handbuch der Physik.* Bd. I, p. 206, Bd. II, p. 146 ; M. BOUSSINESQ. — *Théorie analytique de la Chaleur*, t. I, p. 47.

(2) BOUSSINESQ. — *Loc. cit.*, t. II, p. 3 et p. 64 (suite) ; KIRCHOFF. — *Theorie der Wärme*, § 6 ; A. WINKELMANN.—*Loc. cit.*, Bd. III, p. 440.

Si l'on a

$$(25)\qquad V(M) = -\frac{1}{4\pi}\int_D \mathfrak{G}(M,P)\, R(P) V(P)\, d\omega_P$$

il est évident d'après la formule (13), p. 23, que V satisfera à l'équation (20) et réciproquement. En tenant compte des résultats du n° **8**, on voit que V satisfera également à la condition (24). Donc la question revient à résoudre l'équation fonctionnelle *homogène* (25).

Nous avons une méthode analogue pour les solutions correspondant aux conditions

$$(26)\qquad \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

et

$$(27)\qquad \frac{\partial V}{\partial n} + p(M)\, V = 0.$$

Considérons ensuite la condition

$$(9)\qquad V = \text{fonction donnée} = f(M) \qquad \text{sur la surface.}$$

Soit $v(M)$ une fonction harmonique qui satisfait à la condition (9). On voit que V est la solution de l'équation fonctionnelle non-homogène

$$(28)\qquad V(M) = \frac{-1}{4\pi}\int_D \mathfrak{G}(M,P)\, R(P)\, V(P)\, d\omega_P + v(M).$$

Et de même pour les conditions

$$(13)\qquad \frac{\partial V}{\partial n} = g(M)$$

$$(14)\qquad \frac{\partial V}{\partial n} + p(M) V = h(M).$$

Les solutions de (21) correspondant aux diverses conditions satisferont à l'équation

$$(29)\qquad V(M) = \frac{-1}{4\pi}\int_D \mathfrak{G}(M,P)\, \big[R(P)\, V(P) + R_1(P)\big]\, d\omega_P + v(M).$$

14.—Arrivons maintenant aux équations (22) et (23) qui renferment la nouvelle variable t. Ce sont — contrairement aux premières — des équations du type *hyperbolique* ou *parabolique* et les problèmes correspondants ne sont pas entièrement analogues à ceux du numéro précédent : ils en diffèrent par l'intervention des données initiales (pour $t = 0$) ; mais ils s'en rapprochent par les données aux limites (c'est-à-dire sur la frontière du domaine en x, y, z).

Nous les résoudrons par un artifice qui fait intervenir au lieu des équations hyperboliques ou paraboliques (22), (23), l'équation (20) laquelle est du type elliptique. Les solutions s'exprimeront sous forme de séries que nous démontrerons plus tard (n° **19**, Ch. III, p. 144) être uniformément et absolument convergentes.

Substituons dans (22) $\mathrm{V}_1 = e^{-\lambda t}\varphi(x, y, z)$; il vient

$$\Delta\varphi = -\lambda\,\mathrm{R}(x, y, z)\varphi. \tag{20^{bis}}$$

Donc V_1 sera une solution de (22), si l'on prend pour φ une solution de (20bis) qui est de la forme (20).

Prenons d'abord le cas où la fonction V doit satisfaire à la condition

$$\mathrm{V} = 0$$

sur la surface et cherchons une fonction φ, solution de (20bis) satisfaisant à

$$\varphi = 0$$

sur la surface.

Nous venons de voir que ceci revient à résoudre une équation homogène (25) — où l'on remplacerait R par $-\lambda$R. — Nous démontrerons plus tard qu'il existe une solution seulement pour une suite infinie de valeurs de λ

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots$$

qui sont toutes réelles et positives. Nous appelons ces quantités,

constantes caractéristiques [1] et nous écrivons les solutions correspondantes,

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots, \ \varphi_n, \ \ldots$$

que nous appelons *fonctions fondamentales* [1]. Donc nous aurons la solution suivante de (22), qui satisfait à (24)

$$\text{(30)} \qquad \mathrm{V} = \sum_1^\infty \mathrm{A}_n \, e^{-\lambda_n t} \, \varphi_n(x, y, z)$$

où les A_n sont des constantes arbitraires, qui doivent être telles que la série (30) soit absolument et uniformément convergente, si les données sont continues. Enfin il faut que V se réduise à une fonction donnée $\alpha(x, y, z)$ pour $t = 0$. C'est-à-dire, il faut que $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n, \ldots$ soient choisies de façon que

$$\text{(31)} \qquad \alpha(x, y, z) = \sum_1^\infty \mathrm{A}_n \, \varphi_n(x, y, z).$$

Nous démontrerons que ce développement est toujours possible, et qu'on peut déterminer les coefficients d'une manière unique analogue à la manière de calculer les coefficients de Fourier.

Remarquons qu'il est nécessaire que la fonction $\alpha(x, y, z)$ satisfasse à la condition

$$\alpha(x, y, z) = 0$$

sur la surface.

Au point de vue physique, il est important de considérer le cas où cette condition n'est pas remplie. C'est par exemple le cas du refroidissement d'un corps dont la distribution thermique est quelconque et qu'on plonge dans de l'eau glacée. On prend dans ce cas pour α une fonction qui est égale à la température initiale dans le domaine *ouvert* D, mais qui prend la valeur zéro sur la surface. La théorie n'est pas encore approfondie dans les cas discontinus, mais

---

[1] D'après M. POINCARÉ.

nous pouvons prévoir par analogie avec ce qui se passe pour la série de Fourier, que la série (31) sera encore valable et qu'elle sera non-uniformément convergente sur la surface. Et dans ce cas nous savons par un théorème de Cauchy que V sera analytique (donc continue) pour $t > 0$, de sorte que la série (31) sera toujours uniformément convergente.

En somme tous ces résultats sont admis par les physiciens depuis longtemps.

Nous avons des résultats tout à fait analogues pour les conditions (26) et (27).

Nous considérons maintenant la condition

$$\text{V} = f(\text{M}) \tag{9}$$

sur la surface.

Soit v une fonction harmonique qui satisfait à (9). La fonction $\alpha(\text{M}) - v(\text{M})$ s'annule sur la surface. Trouvons par la méthode précédente une fonction V_1, satisfaisant à (22), s'annulant sur la surface, et se réduisant à $\alpha - v$ pour $t = 0$.

On voit tout de suite que

$$\text{V} = \text{V}_1 + v$$

est une fonction satisfaisant à (22), se réduisant à $f(\text{M})$ sur la surface et à $\alpha(\text{M})$ pour $t = 0$.

Il est nécessaire évidemment que $\alpha(\text{M})$ satisfasse à la condition (9), mais pour le cas discontinu les remarques précédentes s'appliquent.

Pour démontrer que la solution est unique, supposons qu'il existe deux solutions distinctes V_1 et V_2. La fonction

$$\text{V}_1 - \text{V}_2 = u$$

1° Satisfait à l'équation

$$\Delta u = \text{R}(\text{M}) \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{32}$$

2° Se réduit à zéro sur S.

3° Se réduit à zéro pour $t = 0$.

Multiplions l'équation (32) par u et intégrons-la

$$\int_{\mathrm{D}} u\,\Delta u\,d\omega_{\mathrm{P}} = \int_{\mathrm{D}} \mathrm{R(P)}\,u\,\frac{\partial u}{\partial t}\,d\omega_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{D}} \mathrm{R(P)}\,u^2\,d\omega_{\mathrm{P}}$$

puisque R n'est pas fonction de t.

D'où, moyennant la formule de Green rappelée au n° **4**, p. 119

$$-\int_{\mathrm{D}} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} d\omega_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{D}} \mathrm{R(P)}\,u^2\,d\omega_{\mathrm{P}}.$$

En intégrant la dernière équation par rapport à t, il vient

$$\int_{\mathrm{D}} \mathrm{R(P)}\,u^2\,d\omega_{\mathrm{P}} = -\mathrm{F}(t),$$

où $\mathrm{F}(t)$ est une fonction qui ne peut pas être négative et qui se réduit à zéro pour $t = 0$, puisque u se réduit à zéro pour $t = 0$ et que R est une fonction positive.

Donc u est identiquement nul.

Cette méthode pour établir que la solution est unique s'applique à tous les problèmes relatifs à l'équation (22). Son application ne présente pas de difficulté et nous nous bornerons à donner le cas précédent [1].

Nous avons enfin à traiter l'équation (23). Si nous y substituons

$$\mathrm{V} = \varphi(x, y, z) \times \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}\lambda t$$

nous aurons

$$\Delta\varphi = -\lambda^2\,\mathrm{R}(x, y, z)\,\varphi. \tag{33}$$

[1] H.-B. Heywood, *Thèse*, p. 84.

Dans ce cas nous pourrons démontrer (n° **23**, p. 151) qu'il existe un système de valeurs de λ^2

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \dots,\ \lambda_n^2,\ \dots$$

qui sont toutes réelles et positives et un système de solutions correspondantes de (33)

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n,\ \dots.$$

La solution pour les différents cas se fait d'une manière un peu différente mais analogue à la précédente (voir le troisième Chapitre).

La résolution de l'équation générale elliptique dépend d'une fonction de Green ; et elle est semblable à celle de l'équation (21) : nous la réservons.

CHAPITRE II

L'ÉQUATION DE FREDHOLM

1. — Nous avons dans ce qui précède appris à ramener les problèmes dont nous nous sommes occupés à l'équation de Fredholm qui s'écrit sous la forme

$$\varphi(s) - \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{1}$$

ou dans le cas de domaines à plusieurs dimensions sous la forme (1′) du n° **3**, p. 4

$$\varphi(\mathrm{M}) - \int_{(\mathrm{D})} \mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,\varphi(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = f(\mathrm{M}). \tag{1′}$$

Nous ne ferons, au moins jusqu'à nouvel ordre, aucune distinction entre ces deux équations et leur appliquerons le même mode de calcul, le même signe $\int$ représentant simplement dans la seconde d'entre elles une intégrale multiple.

Dans chacun de ces cas la fonction φ est à déterminer tandis que f, K sont des fonctions données, toutes ces fonctions étant bien entendu supposées intégrables.

Nous indiquerons plusieurs méthodes pour résoudre l'équation (1).

I. — MÉTHODE D'ITÉRATION

2. — Le premier procédé dont on ait disposé est dû à Liouville (1). Il n'est autre, lorsqu'on l'applique au problème de Dirichlet, que celui qui est bien connu sous le nom de *méthode de Neumann* (2). Neumann

---

(1) *Journal de Liouville*, t. II, p. 24, 1837.

(2) Voir *Untersuchungen über das Logarithmische und Newtonsche Potential.*

lui-même démontre la légitimité des opérations pour les frontières convexes et non «biétoilées» (1). En écrivant l'équation (1), sous la forme

$$\varphi(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) \tag{2}$$

on est amené à rapprocher cette équation fonctionnelle de l'équation ordinaire :

$$\varphi = \mathrm{F}(\varphi)$$

où φ est un *nombre* inconnu et $\mathrm{F}(\varphi)$ une fonction connue de φ.

On sait que sous certaines conditions de continuité (2) on obtient la solution de cette équation en «réitérant» indéfiniment la fonction F. C'est-à-dire que les nombres

$$\varphi_1 = \mathrm{F}(\varphi_0),\ \ \varphi_2 = \mathrm{F}(\varphi_1),\ \ \dots,\ \ \varphi_n = \mathrm{F}(\varphi_{n-1}),\ \ \dots$$

où φ_0 est arbitraire sont des valeurs approchées qui tendent vers la racine de l'équation.

Une méthode analogue peut s'appliquer à l'équation (2).

Remarquons d'abord que s'il existe une solution $\varphi(s)$ continue et si $\mathrm{K}(s,t)$ est continue presque partout (n° **5**$^{\mathbf{bis}}$, p. 6), la fonction $f(s)$ devra être aussi continue. Nous supposerons donc que $f(s)$ est continue.

Substituons à $\varphi(t)$ dans le second membre de (2) la valeur que donnerait l'équation si une fonction continue arbitrairement choisie $\varphi_0(s)$ en était solution ; on obtient

$$\varphi_1(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi_0(t)\,dt + f(s). \tag{3}$$

Opérons de même en remplaçant φ_0 par φ_1 et ainsi de suite, on aura une suite de fonctions

$$\varphi_0(s),\ \ \varphi_1(s),\ \ \dots,\ \ \varphi_n(s),\ \ \dots$$

(1) Voir la note de la page précédente.

(2) Il suffit que $\mathrm{F}(\varphi)$ possède une dérivée $\mathrm{F}'\varphi$ et que l'on ait $|\mathrm{F}'\varphi| < k$, nombre fixe < 1.

telles que :

$$\varphi_n(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt + f(s). \tag{4}$$

Si moyennant certaines hypothèses sur les données, nous pouvons montrer que $\varphi_n(s)$ converge absolument et uniformément vers une fonction limite $\varphi(s)$, lorsque n croît indéfiniment, on voit que la formule (4) deviendra à la limite la formule (2), c'est-à-dire que la fonction limite $\varphi(s)$ sera une solution de l'équation de Fredholm dont les fonctions $\varphi_n(s)$ seront des valeurs aussi approchées que l'on veut.

Or on a d'après (3), (4) :

$$\varphi_{n+1}(s) = f(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,f(t)\,dt + \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\int_a^b \mathrm{K}(t,t_1)\,f(t_1)\,dt_1\,dt + \dots \tag{4'}$$
$$+ \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\int_a^b \mathrm{K}(t,t_1)\dots\int_a^b \mathrm{K}(t_{n-2},t_{n-1})\,f(t_{n-1})\,dt_{n-1}\,dt_{n-2}\dots dt_1\,dt + \mathrm{R}_{n+1}$$

avec

$$\mathrm{R}_{n+1} = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\int_a^b \mathrm{K}(t,t_1)\dots\int_a^b \mathrm{K}(t_{n-1},t_n)\,\varphi_0(t_n)\,dt_n\,dt_{n-1}\dots dt_1\,dt.$$

Nous avons supposé que $\mathrm{K}(s,t)$ est bornée dans son champ de variation. Soit M, la borne supérieure de sa valeur absolue ; soient aussi P, N les bornes supérieures de $|\varphi_0(s)|$ et $|f(s)|$ dans (a,b), on aura :

$$|\mathrm{R}_n| < \big[\mathrm{M}(b-a)\big]^n\mathrm{P}.$$

D'autre part, on observe que φ_n représente la somme de R_n et des n premiers termes d'une série dont le terme général est, en valeur absolue, inférieur à

$$\big[\mathrm{M}(b-a)\big]^n\mathrm{N}.$$

Dans le cas où l'on a

$$\mathrm{M}\,(b-a) < 1,$$

on voit que cette série est uniformément et absolument convergente dans (a, b) et que R_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Cette série étant indépendante de $\varphi_0(s)$, on voit que la limite $\varphi(s)$ de $\varphi_n(s)$ est indépendante de la fonction $\varphi_0(s)$ dont on est parti. On voit aussi d'après les formules (3), (4) que $\varphi_0(s)$, étant supposée continue, $\varphi_n(s)$ sera aussi continue et par suite aussi sa limite uniforme $\varphi(s)$. Ayant ainsi obtenu une solution continue $\varphi(s)$ de l'équation de Fredholm, il est facile de voir que dans nos hypothèses actuelles il ne peut y en avoir d'autres. En effet supposons que $\psi(s)$ soit une nouvelle solution continue de (2). En prenant pour $\varphi_0(s)$ la fonction $\psi(s)$, il est manifeste que tous les $\varphi_n(s)$ seront identiques à $\psi(s)$. Par suite leur limite $\varphi(s)$ (indépendante du choix de φ_0) sera aussi égale à $\psi(s)$.

Ainsi *lorsque la borne supérieure* M *de* $|K(s, t)|$ *est inférieure à* $\frac{1}{b-a}$ *l'équation de Fredholm admet une seule solution continue* $\varphi(s)$ *qui est donnée par la série absolument et uniformément convergente* :

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(s) = f(s) + \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt + \dots \\ \qquad + \int_a^b K(s,t) \int_a^b K(t,t_1) \dots \int_a^b K(t_{n-1}, t_n)\, dt_n\, dt_{n-1} \dots dt_1\, dt + \dots . \end{cases}$$

Si au lieu de l'équation telle que nous venons de la traiter, on avait pris (comme dans l'Introduction, p. 1) l'équation

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt = f(s)$$

qui contient le paramètre λ, ce qui revient à changer $K(s, t)$ en $\lambda K(s, t)$, la solution aurait été évidemment

$$(5') \quad \begin{cases} \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt + \dots \\ \qquad + \lambda^n \int_a^b K(s,t) \int_a^b K(t,t_1) \dots \int_a^b K(t_{n-1}, t_n)\, dt_n\, dt_{n-1} \dots dt_1\, dt + \dots . \end{cases}$$

De là résulte que la présente méthode consiste au fond à développer la solution suivant les puissances croissantes de λ.

3. Les noyaux réitérés. — On écrit souvent cette série en introduisant les «noyaux réitérés». On appelle ainsi (et nous désignerons par les symboles $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$), les noyaux successifs définis par les relations

$$(6) \qquad K_1(s,t) = K(s,t), \ldots \ K_n(s,t) = \int_a^b K(s,\tau)\, K_{n-1}(\tau,t)\, d\tau, \ldots.$$

Moyennant cette notation, les formules (3), (4), deviennent par un simple changement dans l'ordre d'intégration

$$(7) \quad \varphi_{n+1}(s) = f(s) + \int_a^b K_1(s,t)\, f(t)\, dt + \ldots + \int_a^b K_n(s,t)\, f(t)\, dt + R_{n+1}$$

avec

$$R_{n+1} = \int_a^b K_{n+1}(s,t)\, \varphi_0(t)\, dt.$$

D'ailleurs, si l'on a encore $M(b-a) < 1$, la série

$$(8) \qquad - k(s,t) = K_1(s,t) + K_2(s,t) + \ldots + K_n(s,t) + \ldots$$

est aussi absolument et uniformément convergente de sorte que la solution de l'équation de Fredholm peut s'écrire

$$(9) \qquad \varphi(s) = f(s) - \int_a^b k(s,t)\, f(t)\, dt.$$

4. — Nous allons démontrer une propriété caractéristique de la fonction $k(s,t)$.

Pour cela, observons d'abord que l'on a évidemment

$$(10) \qquad K_n(s,t) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(s,t_1)\, K(t_1,t_2) \ldots K(t_{n-1},t)\, dt_{n-1} \ldots dt_1.$$

D'où l'on tire immédiatement par de simples changements dans l'ordre d'intégration, *la formule remarquable*

$$(11) \qquad K_{n+p}(s,t) = \int_a^b K_n(s,\tau)\, K_p(\tau,t)\, d\tau.$$

Alors on aura d'après (8)

$$\begin{aligned}-k(s,t)-\mathrm{K}(s,t) &= \mathrm{K}_2(s,t)+\mathrm{K}_3(s,t)+\ldots+\mathrm{K}_n(s,t)+\ldots\\ &= \int_a^b \mathrm{K}_1(s,\tau)\,\mathrm{K}_1(\tau,t)\,d\tau+\ldots+\int_a^b \mathrm{K}_{n-1}(s,\tau)\,\mathrm{K}_1(\tau,t)\,d\tau+\ldots\\ &= \int_a^b \mathrm{K}_1(s,\tau)\,\mathrm{K}_1(\tau,t)\,d\tau+\ldots+\int_a^b \mathrm{K}_1(s,\tau)\,\mathrm{K}_{n-1}(\tau,t)\,d\tau+\ldots\end{aligned}$$

d'où les deux formes :

$$\begin{aligned}-k(s,t)-\mathrm{K}(s,t) &= \int_a^b \left[\mathrm{K}_1(s,\tau)+\ldots+\mathrm{K}_{n-1}(s,\tau)+\ldots\right]\mathrm{K}_1(\tau,t)\,d\tau\\ &= \int_a^b \mathrm{K}_1(s,\tau)\left[\mathrm{K}_1(\tau,t)+\ldots+\mathrm{K}_{n-1}(\tau,t)+\ldots\right]d\tau.\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule caractéristique suivante

$$\mathrm{K}(s,t)+k(s,t)=\int_a^b k(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau=\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau. \tag{12}$$

5. Fonctions réciproques. — La formule (12) est démontrée pour $\mathrm{M}(b-a)<1$. Mais elle a un sens même en dehors de ce cas. Alors étant donnée la fonction $\mathrm{K}(s,t)$, nous appellerons *réciproque* de $\mathrm{K}(s,t)$, une fonction $k(s,t)$ bornée et intégrable, telle que l'on ait :

$$\mathrm{K}(s,t)+k(s,t)=\int_a^b k(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau=\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau. \tag{13}$$

M. Volterra a montré que, connaissant une fonction réciproque $k(s,t)$ de $\mathrm{K}(s,t)$, on peut toujours trouver une solution continue de l'équation de Fredholm (1). Soit, en effet, $u(s)$ une telle solution, on aura

$$u(t)=f(t)+\int_a^b \mathrm{K}(t,t_1)\,u(t_1)\,dt_1. \tag{14}$$

En multipliant par $k(s,t)$ et intégrant, on aura

$$\int_a^b k(s,t)\,u(t)\,dt = \int_a^b k(s,t)\,f(t)\,dt + \int_a^b \int_a^b k(s,t)\,\mathrm{K}(t,t_1)\,u(t_1)\,dt_1\,dt$$

égal d'après (13) à

$$\int_a^b k(s,t)\,f(t)\,dt + \int_a^b \big[\mathrm{K}(s,t_1) + k(s,t_1)\big]\,u(t_1)\,dt_1.$$

On a donc

$$0 = \int_a^b k(s,t)\,f(t)\,dt + \int_a^b \mathrm{K}(s,t_1)\,u(t_1)\,dt_1$$

de sorte que (14), où l'on a remplacé t par s, devient :

$$u(s) = f(s) - \int_a^b k(s,t)\,f(t)\,dt. \tag{15}$$

S'il y a une solution continue elle est donc unique et donnée par cette formule. D'ailleurs pour prouver qu'il y a bien une solution continue, il suffit de montrer que le second membre de (15) satisfait bien à l'équation de Fredholm. En effet, si nous posons

$$v(s) = f(s) - \int_a^b k(s,t)\,f(t)\,dt \tag{16}$$

la fonction donnée $f(s)$ peut être considérée comme une solution continue d'une nouvelle équation de Fredholm, l'équation (16), dont le noyau $k(s,t)$ a pour fonction réciproque $\mathrm{K}(s,t)$. Alors, d'après ce qui précède, $f(t)$ est donnée par la formule (15), où on substitue $v(s)$, $\mathrm{K}(s,t)$, $f(s)$ à $f(s)$, $k(s,t)$, $u(s)$ respectivement ; ce qui donne

$$f(s) = v(s) - \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,v(t)\,dt$$

c'est-à-dire que $v(t)$ est bien solution de l'équation de Fredholm donnée (1).

D'ailleurs le même raisonnement appliqué à la formule (13) considérée comme équation intégrale en $k(s,t)$ prouve que si une fonction réciproque existe, elle est unique.

5bis. — On peut considérer le second membre de (1) comme le résultat d'une *opération fonctionnelle* effectuée sur φ, ceci signifiant qu'on en peut calculer la valeur lorsque φ est donnée. Représentons cette opération par le symbole $f = \mathrm{S}_\varphi$. L'équation (9) exprime alors que l'opération qui transforme $f(s)$ en

$$f(s) - \int_a^b k(s,t)\, f(t)\, dt$$

est l'inverse de S, c'est-à-dire qu'elle fournit φ lorsque f est donnée. On peut la désigner par S^{-1} et on a identiquement $\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{S}_\varphi = \varphi$.

6. La généralisation de Schmidt. — Nous avons vu que l'on peut former une *fonction réciproque* du noyau et par suite résoudre l'équation de Fredholm quand la borne supérieure de $|\mathrm{K}(s,t)|$ est inférieure à $\dfrac{1}{b-a}$. M. Schmidt a considérablement étendu ce résultat.

1° Il a d'abord montré qu'*on peut appliquer la méthode d'itération lorsque l'on a*

$$\int_a^b \int_a^b \big[\mathrm{K}(s,t)\big]^2\, ds\, dt < \mu < 1, \tag{17}$$

μ désignant une quantité numérique déterminée. Cette inégalité a lieu quand $|\mathrm{K}|$ a une borne supérieure plus petite que $\dfrac{1}{b-a}$, mais aussi dans des cas plus généraux.

Cette démonstration est fondée sur la formule (11) et sur l'inégalité de Schwarz (8), page 8, d'où l'on tire

$$[\mathrm{K}_{n+1}(s,t)]^2 \leqslant \int_a^b \big[\mathrm{K}_n(s,r)\big]^2\, dr \cdot \int_a^b \big[\mathrm{K}(r,t)\big]^2\, dr, \tag{18}$$

et par suite

$$\int_a^b \int_a^b \big[\mathrm{K}_{n+1}(s,t)\big]^2\, ds\, dt \leqslant \int_a^b \int_a^b \big[\mathrm{K}_n(s,r)\big]^2\, dr\, ds \cdot \int_a^b \int_a^b \big[\mathrm{K}(r,t)\big]^2\, dr\, dt. \tag{19}$$

On déduit facilement de (19)

$$(20) \qquad \int_a^b \int_a^b \big[\mathrm{K}_n(s,t)\big]^2 ds\,dt \leqslant \left[\int_a^b \int_a^b \big[\mathrm{K}(s,t)\big]^2 ds\,dt\right]^n.$$

Or on tire de (11)

$$\mathrm{K}_n(s,t) = \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(s,r_1)\,\mathrm{K}_{n-2}(r_1,r_2)\,\mathrm{K}(r_2,t)\,dr_1\,dr_2,$$

et en se servant de l'inégalité de Schwarz (8), page 8, formée comme (8), mais avec des intégrales doubles, on aura

$$\big[\mathrm{K}_n(s,t)\big]^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b \big[\mathrm{K}_{n-2}(r_1,r_2)\big]^2 dr_1\,dr_2 \cdot \int_a^b \int_a^b \big[\mathrm{K}(s,r_1)\big]^2 \big[\mathrm{K}(r_2,t)\big]^2 dr_1\,dr_2.$$

En combinant avec (20), on a donc

$$\big|\mathrm{K}_n(s,t)\big| \leqslant \left\{\int_a^b \int_a^b \big[\mathrm{K}(s,t)\big]^2 ds\,dt\right\}^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[\int_a^b \big[\mathrm{K}(s,r_1)\big]^2 dr_1 \cdot \int_a^b \big[\mathrm{K}(r_2,t)\big]^2 dr_2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant maintenant l'hypothèse (17), on voit que les termes de la série (8) sont à partir du troisième rang inférieurs en valeurs absolues à ceux de la série convergente

$$\left[\int_a^b \big[\mathrm{K}(s,r)\big]^2 dr \cdot \int_a^b \big[\mathrm{K}(r,t)\big]^2 dr\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \big[\sqrt{\mu}+(\sqrt{\mu})^2+(\sqrt{\mu})^3+\ldots+(\sqrt{\mu})^n+\ldots\big].$$

Alors la série (8) est absolument et uniformément convergente, sa somme $-k$ donne la fonction réciproque k, et par suite on peut écrire la solution unique (9).

2° D'autre part, *il est facile de résoudre directement l'équation de Fredholm dans le cas où son noyau est de la forme* $\sum_{q=1}^{q=p} \alpha_q(s)\,\beta_q(t)$.

Pour faciliter la discussion, nous le supposerons multiplié par un facteur numérique arbitraire λ. Considérons donc l'équation

$$(21) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b \varphi(t) \left[\sum_1^p \alpha_q(s)\,\beta_q(t)\right] dt = f(s).$$

On voit tout de suite quelle est la forme de la solution en écrivant l'équation sous la forme :

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{1}^{p} \alpha_q(s) \left[\int_a^b \beta_q(t)\,\varphi(t)\,dt\right], \tag{22}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(s) = f(s) - \lambda \sum_{1}^{p} a_q\,\alpha_q(s), \tag{23}$$

où les a_q sont des constantes à déterminer. On les calculera par la méthode des coefficients indéterminés en substituant (23) dans (21) ce qui donne

$$\sum_{1}^{p} \alpha_q(s) \left\{\lambda \sum_{r=1}^{r=p} a_r \int_a^b \alpha_r(t)\,\beta_q(t)\,dt - a_q - \int_a^b \beta_q(t)\,f(t)\,dt\right\} = 0, \tag{24}$$

de sorte qu'on obtiendra une solution du problème en déterminant les constantes a_r par les équations linéaires

$$\sum_{r=1}^{r=p} a_r \left[\lambda \int_a^b \alpha_r(t)\,\beta_q(t)\,dt\right] - a_q = \int_a^b \beta_q(t)\,f(t)\,dt, \tag{25}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, p).$$

Si nous posons

$$\mathrm{A}_{r,q} = \int_a^b \alpha_r(t)\,\beta_q(t)\,dt,$$

on voit que le déterminant des coefficients de ces équations sera un polynôme en λ de degré p au plus

$$\begin{vmatrix} \lambda\mathrm{A}_{11} - 1 & \lambda\mathrm{A}_{12} & \ldots & \lambda\mathrm{A}_{1p} \\ \lambda\mathrm{A}_{21} & \lambda\mathrm{A}_{22} - 1 & \ldots & \lambda\mathrm{A}_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda\mathrm{A}_{p1} & \lambda\mathrm{A}_{p2} & \ldots & \lambda\mathrm{A}_{pp} - 1 \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Ce polynôme n'est certainement pas identiquement nul puisque, pour $\lambda = 0$, il est égal à $(-1)^p$. On pourra donc résoudre les équations linéaires

quand λ a une valeur quelconque autre que les racines (en nombre au plus égal à p) du déterminant.

Et, si nous supposons que les fonctions $\alpha_p(s)$ sont linéairement indépendantes, nous voyons même que les équations (24) ne peuvent avoir lieu que si les équations linéaires (25) sont vérifiées.

En résumé si les fonctions $\alpha_q(s)$ sont linéairement indépendantes l'équation fonctionnelle (21) admet une solution unique $\varphi(s)$ que nous savons déterminer complètement sous la forme (23) et ceci pour toute valeur de λ sauf peut-être pour p valeurs de λ au plus, racines du déterminant.

Nous remarquerons que ces racines ne dépendent que du noyau, nous les retrouverons plus tard dans le cas général (p. 57) sous le nom de constantes caractéristiques.

3° Revenons maintenant à la méthode de Schmidt qui résulte de la combinaison de 1° et 2°.

Ici encore nous faciliterons la discussion en supposant que le noyau possède en facteur une constante arbitraire λ. Le noyau étant désigné par $\lambda \mathrm{K}(s,t)$, où K est une fonction continue quelconque, on voit que la condition (17) ne sera vérifiée que pour des valeurs de $|\lambda|$ inférieures à une certaine quantité finie. Pour résoudre l'équation pour les autres valeurs de λ, nous montrerons d'abord qu'on peut toujours trouver des fonctions continues $\alpha_q(s)$ linéairement indépendantes et des fonctions continues $\beta_q(t)$ en nombre égal de façon que l'expression

$$\int_a^b \int_a^b \left[\mathrm{K}(s,t) - \sum_{q=1}^{q=p} \alpha_q(s)\,\beta_q(t)\right]^2 ds\,dt,$$

soit aussi petite que l'on veut.

Le noyau étant uniformément continu dans le domaine $\begin{matrix} a < s < b \\ a < t < b \end{matrix}$, on peut trouver un entier p tel que deux valeurs de $\mathrm{K}(s,t)$ prises en deux points à une distance inférieure à $\dfrac{2(b-a)}{p}$, ne puissent différer de plus de δ. Divisons maintenant l'intervalle (a,b) en p intervalles égaux $i_1, i_2, \ldots, i_p$ et appelons leurs milieux $s_1, s_2, \ldots, s_p$.

Nous prendrons pour les $\beta_q(t)$ les fonctions

$$\beta_q(t) = \mathrm{K}(s_q, t).$$

Pour définir $\alpha_q(s)$, nous construirons une fonction $a_q(s)$ égale à 1 dans l'intervalle i_q et à 0 en dehors de i_q ; puis pour la rendre continue, nous modifierons légèrement ici la construction de Schmidt. Appelons i'_q un intervalle de longueur $\dfrac{2(b-a)}{p^2}$ et ayant pour milieu l'extrémité commune à i_q et i_{q+1} ; nous prendrons $\alpha_q(s) = a_q(s)$, sauf dans les intervalles i'_{q-1} et i'_q où nous prendrons pour $\alpha_q(s)$ une fonction linéaire de la valeur 0 à la valeur 1 ou inversement.

Alors quand s est dans i_q sans être dans i'_{q-1} ni dans i'_q, on a :

$$\Big|\mathrm{K}(s,t) - \sum_1^p \alpha_q(s)\,\beta_q(t)\Big| = \big|\mathrm{K}(s,t) - \mathrm{K}(s_q,t)\big| \leqslant \delta.$$

Quand s est dans i'_q, on a :

$$\Big|\mathrm{K}(s,t) - \sum_1^p \alpha_q(s)\,\beta_q(t)\Big| = \big|\mathrm{K}(s,t) - \alpha_q(s)\,\mathrm{K}(s_q,t) - \alpha_{q+1}(s)\,\mathrm{K}(s_{q+1},t)\big|,$$

et comme on voit facilement que dans i'_q on a $\alpha_q(s) + \alpha_{q+1}(s) = 1$, la quantité précédente sera égale à

$$\begin{gathered}\big|\alpha_q(s)\big[\mathrm{K}(s,t) - \mathrm{K}(s_q,t)\big] + \alpha_{q+1}(s)\big[\mathrm{K}(s,t) - \mathrm{K}(s_{q+1},t)\big]\big| \\ < \big|\mathrm{K}(s,t) - \mathrm{K}(s_q,t)\big| + \big|\mathrm{K}(s,t) - \mathrm{K}(s_{q+1},t)\big| \leqslant 2\delta.\end{gathered}$$

Ainsi, on a en tout cas,

$$\int_a^b\int_a^b \left[\mathrm{K}(s,t) - \sum_{q=1}^{q=p} \alpha_q(s)\,\beta_q(t)\right]^2 ds\,dt \leqslant 4\delta^2(b-a)^2,$$

et en faisant croître p nous pourrons rendre le second membre aussi petit que l'on veut.

4° Ceci étant, soit l'équation de Fredholm donnée :

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s), \tag{27}$$

choisissons les fonctions α, β, de façon qu'on ait par exemple

$$\lambda^2 \int_a^b \int_a^b \left[\mathrm{K}(s,t) - \sum_1^p \alpha_q(s)\,\beta_q(t)\right]^2 ds\,dt < \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Ecrivons alors (27) sous la forme

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{H}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f_1(s), \tag{29}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{H}(s,t) &= \left[\mathrm{K}(s,t) - \sum_1^p \alpha_q(s)\,\beta_q(t)\right], \\ f_1(s) &= f(s) + \lambda \sum_1^p \int_a^b \alpha_q(s)\,\beta_q(t)\,\varphi(t)\,dt. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Alors d'après 1° et (28) il existera une fonction $h(s,t,\lambda)$ réciproque du noyau $\lambda\mathrm{H}(s,t)$ et l'équation de Fredholm (29) admettra une seule solution continue

$$\varphi(s) = f_1(s) - \int_a^b h(s,t,\lambda)\,f_1(t)\,dt.$$

Si nous y remplaçons f_1 par son expression (30), nous voyons que l'équation (27) est équivalente à l'équation

$$\begin{aligned} \varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_1^p \int_a^b \alpha_q(s)\,\beta_q(t)\,\varphi(t)\,dt - \int_a^b h(s,t,\lambda)\,f(t)\,dt \\ - \lambda \sum_1^p \int_a^b \int_a^b h(s,r,\lambda)\,\alpha_q(r)\,\beta_q(t)\,\varphi(t)\,dr\,dt, \end{aligned}$$

qui peut s'écrire :

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \sum_1^p \left[f_q(s, \lambda)\, \beta_q(t)\, \varphi(t) \right] dt = \mathrm{F}(s), \tag{32}$$

en posant

$$\mathrm{F}(s) = f(s) - \int_a^b h(s, t, \lambda)\, f(t)\, dt,$$
$$f_q(s, \lambda) = \alpha_q(s) - \int_a^b h(s, r, \lambda)\, \alpha_q(r)\, dr.$$

Alors on est ramené à une équation de Fredholm (32) de la forme (21) déjà examinée. La seule différence, c'est que le déterminant (26) n'est plus un polynôme en λ, les fonctions f_q dépendant déjà elles-mêmes de λ. Mais il est encore égal à $(-1)^p$ pour $\lambda = 0$ et par suite non identiquement nul.

Ainsi *lorsque le noyau* $\lambda\mathrm{K}(s, t)$ *est un noyau continu quelconque et lorsque* λ *n'est pas égal à certaines valeurs exceptionnelles* (racines du déterminant mentionné) *l'équation de Fredholm a une solution continue unique.*

5° Le cas où la fonction inconnue dépend de plusieurs variables tel qu'il a été indiqué au n° **3**, p. 4, se traite par la même méthode.

7. Équation de Volterra. — On appelle *équation de Volterra* l'équation

$$\varphi(s) - \int_a^s \mathrm{K}(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s) \tag{33}$$

qui dérive de (1) en remplaçant la limite supérieure fixe b, par la limite variable s.

Cette équation est un cas particulier de l'équation (1), mais la convergence des séries obtenues est plus favorable. Ces séries sont uniformément convergentes toutes les fois que $\mathrm{K}(s, t)$ est borné et intégrable.

On peut, en effet, identifier l'équation (33) avec l'équation (1) en prenant dans l'équation (1) à la place de $\mathrm{K}(s,t)$ une fonction qui est égale à $\mathrm{K}(s,t)$ tant que $t \leqslant s$, mais qui s'évanouit pour $t > s$. La solution s'exprime par la série — analogue à la série (5), p. 40 —

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(s) = f(s) + \int_a^s \mathrm{K}(s,t)\, f(t)\, dt + \int_a^s \int_a^{s_1} \mathrm{K}(s,s_1)\, \mathrm{K}(s_1,t)\, f(t)\, ds_1\, dt + \ldots \\ &+ \int_a^s \int_a^{s_1} \ldots \int_a^{s_{n-1}} \mathrm{K}(s,s_1)\, \mathrm{K}(s_1,s_2)\, \mathrm{K}(s_2,s_3) \ldots \mathrm{K}(s_{n-1},t)\, f(t)\, ds_1\, ds_2 \ldots dt + \ldots \\ &\qquad = f(s) + \int_a^s \big[\mathrm{K}(s,t) + \mathrm{K}_2(s,t) + \mathrm{K}_3(s,t) + \ldots + \mathrm{K}_{n+1}(s,t) + \ldots\big]\, f(t)\, dt, \end{aligned}\right.$$

où

$$\mathrm{K}_n(s,t) = \int_a^s \int_a^{s_1} \ldots \int_a^{s_{n-1}} \mathrm{K}(s,s_1)\, \mathrm{K}(s_1,s_2) \ldots \mathrm{K}(s_{n-1},t)\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_{n-1}.$$

Soit M la borne supérieure de la valeur absolue de K. On a

$$\begin{aligned} \big|\mathrm{K}\ (s,t)\big| &\leqslant \mathrm{M} \\ \big|\mathrm{K}_2(s,t)\big| &= \left|\int_a^s \mathrm{K}(s,s_1)\, \mathrm{K}(s_1,t)\, ds_1\right| \\ &\leqslant \int_a^s \mathrm{M}^2\, ds_1 = \mathrm{M}^2(s-a) \\ \big|\mathrm{K}_3(s,t)\big| &= \left|\int_a^s \mathrm{K}(s,s_1)\, \mathrm{K}_2(s_1,t)\, ds_1\right| \\ &\leqslant \int_a^s \mathrm{M}^3(s-a)\, ds = \mathrm{M}^3\, \frac{(s-a)^2}{1 \cdot 2} \end{aligned}$$

et en général

$$\big|\mathrm{K}_n(s,t)\big| \leqslant \mathrm{M}^n\, \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Donc la série

$$(35)\qquad \mathrm{K}(s,t) + \mathrm{K}_2(s,t) + \mathrm{K}_3(s,t) + \ldots + \mathrm{K}_n(s,t) + \ldots$$

est comparable avec

$$\mathrm{M} + \mathrm{M}^2(s-a) + \mathrm{M}^3\,\frac{(s-a)^2}{2!} + \ldots + \mathrm{M}^n\,\frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$

de sorte que la série (35) est toujours uniformément et absolument convergente, et la solution (34) est toujours valable.

M. Volterra a beaucoup étendu ce résultat, il a traité d'une manière analogue l'équation de *première espèce*

$$\int_a^s \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

et il en a fait des applications. Nous renvoyons le lecteur à son mémoire dans les *Annali di Matematica*, 1906.

II. — MÉTHODE DE FREDHOLM

8. — La méthode de Fredholm pour résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(s) - \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{1}$$

consiste à étendre au cas des équations fonctionnelles le procédé de résolution des équations du premier degré à une infinité d'inconnues.

Sa méthode sera développée un peu plus loin sous forme synthétique, mais elle paraîtrait tout à fait artificielle si nous ne montrions auparavant comment on y est conduit par un passage à la limite.

Divisons l'intervalle (a,b) en intervalles partiels par les points

$$s_0 = a,\ \ s_1 = a+\delta,\ \ s_2 = a+2\delta,\ \ \ldots,\ \ s_n = a+n\delta = b, \qquad \left(\delta = \frac{b-a}{n}\right)$$

et prenons d'abord comme inconnues non pas la fonction $\varphi(s)$, mais ses valeurs

$$x_p = \varphi(s_p) \qquad (p = 0, 1, \ldots, n).$$

On aura d'après (1)

$$x_p - \int_a^b \mathrm{K}(s_p, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s_p), \tag{36}$$

ou, d'après la définition de l'intégrale

$$x_p - \lim_{n=\infty} \left\{ \delta \sum_{q=1}^{q=n} x_q \mathrm{K}(s_p, s_q) \right\} = f(s_p).$$

La méthode consiste alors à considérer comme valeurs approchées des x_p les solutions des équations linéaires :

$$x_p - \delta \sum_{q=1}^{q=n} x_q \mathrm{K}(s_p, s_q) = f(s_p) \tag{36^{bis}}$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

On voit alors que l'existence de la solution dépend de la valeur du déterminant des coefficients des x_p

$$\mathrm{D}_n = \begin{vmatrix} 1 - \delta\mathrm{K}(s_1, s_1) & -\delta\mathrm{K}(s_1, s_2) & \ldots & -\delta\mathrm{K}(s_1, s_n) \\ -\delta\mathrm{K}(s_2, s_1) & 1 - \delta\mathrm{K}(s_2, s_2) & \ldots & -\delta\mathrm{K}(s_2, s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\delta\mathrm{K}(s_n, s_1) & -\delta\mathrm{K}(s_n, s_2) & \ldots & 1 - \delta\mathrm{K}(s_n, s_n) \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \delta \sum_{p=1}^{p=n} \mathrm{K}(s_p, s_p)$$

$$+ \frac{1}{2!}\delta^2 \sum \begin{vmatrix} \mathrm{K}(s_p, s_p) & \mathrm{K}(s_p, s_q) \\ \mathrm{K}(s_q, s_p) & \mathrm{K}(s_q, s_q) \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^n\,\delta^n \begin{vmatrix} \mathrm{K}(s_1, s_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_1, s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{K}(s_n, s_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_n, s_n) \end{vmatrix}.$$

Si on fait croître n indéfiniment, on voit que chacun des termes de cette somme a une limite déterminée. De sorte que D_n tend, au moins formellement vers la série

$$\mathrm{D} = 1 - \int_a^b \mathrm{K}(\tau, \tau)\,d\tau + \frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} \mathrm{K}(\tau_1, \tau_1) & \mathrm{K}(\tau_1, \tau_2) \\ \mathrm{K}(\tau_2, \tau_1) & \mathrm{K}(\tau_2, \tau_2) \end{vmatrix} d\tau_1\,d\tau_2 + \ldots.$$

Il y aurait lieu ensuite de voir aussi ce que deviennent les formules de Cramer, de rechercher ce qui se passe quand $\mathrm{D} = 0$ et surtout de rendre la méthode rigoureuse. C'est ce qui a été fait par M. Hilbert (1) qui retrouve ainsi les formules que nous allons établir par la méthode synthétique de Fredholm.

Nous nous contenterons cependant d'avoir montré, au moins sur l'exemple de la série D, que certains développements compliqués introduits *a priori* dans la méthode de Fredholm (nº **10**, formules (40), (41), ...) ne sont pas construits de toutes pièces, mais qu'au contraire leur considération s'impose quand on s'inspire du passage à la limite.

9. *Théorème de M. Hadamard* (2). — Pour étudier la convergence de D, il serait utile de connaître le maximum de la valeur absolue des déterminants qui y figurent. M. Fredholm s'est servi dans ce but d'un théorème de M. Hadamard. Nous nous contenterons de démontrer ce théorème dans le cas d'un déterminant à termes réels (3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Il s'agit de prouver que l'on a :

(37) $$\Delta^2 \leqslant (a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2) \ldots (a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \ldots + a_{nn}^2).$$

Pour cela, posons

$$\delta_p^2 = a_{p1}^2 + a_{p2}^2 + \ldots + a_{pn}^2 \qquad (p = 1, 2 \ldots n)$$

(1) *Götting. Nachrichten*, 1904.

(2) *Bull. des Sc. Math.* M. Muir, en réponse à Lord Kelvin (qui possédait dès 1885, l'énoncé de la proposition en question), lui avait communiqué, en 1886, un raisonnement qui démontrait cette proposition ou du moins la rendait très vraisemblable. Ce raisonnement a été publié en 1901 dans les *Reprints* de l'*Educational Times*. (Voir aussi l'article récent de l'auteur dans les *Trans. of the Royal Soc. of South Africa*, t. II, 2me partie) (Note de M. Hadamard).

(3) La démonstration ne serait d'ailleurs guère plus compliquée dans le cas des termes imaginaires.

et cherchons la borne supérieure de Δ^2 lorsque les $a_{p,q}$ varient de façon que les δ_p^2 gardent des valeurs arbitraires données. Il est manifeste que Δ^2 est une fonction continue et dérivable par rapport aux $a_{p,q}$ qui eux-mêmes restent bornés quand les δ_p^2 sont fixes. Donc Δ^2 atteint un maximum Δ_0^2 donné par les règles du calcul différentiel.

On aura ainsi :

$$0 = d\Delta_0 = \frac{\partial \Delta_0}{\partial a_{p1}}\, da_{p1} + \frac{\partial \Delta_0}{\partial a_{p2}}\, da_{p2} + \ldots + \frac{\partial \Delta_0}{\partial a_{pn}}\, da_{pn}$$

pour toutes les variations telles que $\delta_p^2 =$ constante, c'est-à-dire telles que

$$\frac{1}{2}\, d\delta_p^2 = a_{p1}\, da_{p1} + a_{p2}\, da_{p2} + \ldots + a_{pn}\, da_{pn} = 0.$$

On a donc

$$\frac{\partial \Delta_0}{\partial a_{pq}} = \lambda_p a_{pq} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

où les λ_p sont des constantes convenables.

D'ailleurs $\dfrac{\partial \Delta_0}{\partial a_{pq}}$ est, comme on sait, égal au coefficient A_{pq} de a_{pq} dans le développement de Δ_0. D'où :

$$\mathrm{A}_{pq} = \lambda_p a_{pq} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$\Delta_0 = \mathrm{A}_{p1} a_{p1} + \ldots + \mathrm{A}_{pn} a_{pn} = \lambda_p \delta_p^2,$$

ce qui donne

$$\mathrm{A}_{pq} = \frac{\Delta_0}{\delta_p^2}\, a_{pq}.$$

Alors le déterminant des A_{pq} (c'est-à-dire le déterminant adjoint de Δ_0, égal comme on sait à Δ_0^{n-1}) sera évidemment égal au déterminant Δ_0 des a_{pq} multiplié par

$$\frac{\Delta_0^n}{\delta_1^2\, \delta_2^2\, \ldots\, \delta_n^2}.$$

D'où :

$$\Delta_0^{n-1} = \frac{\Delta_0^n}{\delta_1^2 \ldots \delta_n^2}\,\Delta_0,$$

avec $|\Delta| \leqslant \Delta_0$.

D'où enfin l'inégalité annoncée $\Delta^2 \leqslant \delta_1^2 \ldots \delta_n^2$.

En particulier, si M est un nombre supérieur ou égal à chacune des valeurs absolues de tous les termes de Δ, on aura $\delta_p^2 \leqslant n\mathrm{M}^2$, d'où

$$|\Delta| \leqslant \sqrt{n^n}\mathrm{M}^n \;(^1). \tag{38}$$

10. — Nous sommes maintenant en mesure de développer la méthode de Fredholm.

Pour faciliter la discussion nous introduirons comme précédemment (n° **2**) un paramètre numérique arbitraire λ et nous nous proposerons de résoudre l'équation

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s), \tag{1^{bis}}$$

où $f(s)$ est continue dans (a,b) et où $\mathrm{K}(s,t)$ est une fonction continue presque partout (n° **5**$^{\textbf{bis}}$, p. 6).

Guidés par la méthode de passage à la limite dont nous avons

(1) M. Kneser a fait connaître récemment une démonstration intéressante de ce même théorème (*Die Integralgleichung*, *Vieweg*, 1911, p. 227). Une démonstration analogue a été donnée en même temps par M. Tommaso Boggio, *Bull. des Sc. Math.*, 1911. Elle consiste à réduire la proposition au cas (où elle devient évidente) où tous les termes d'un côté de la diagonale principale sont nuls. On y arrive en opérant une même substitution orthogonale sur chacune des lignes du déterminant Δ.

donné une idée plus haut (nº **8**), nous envisagerons les deux séries

$$(40)\qquad \mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big) = \mathrm{K}(s,t) - \lambda\int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s, s_1 \\ t, s_1 \end{pmatrix} ds_1 + \dots \\ + \frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_a^b \dots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s, s_1, s_2, \dots, s_n \\ t, s_1, s_2, \dots, s_n \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \dots ds_n + \dots$$

$$(41)\qquad \mathrm{D}(\lambda) = 1 - \lambda\int_a^b \mathrm{K}(s_1, s_1)\, ds_1 + \dots \\ + \frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_a^b \dots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_n + \dots$$

avec

$$(42)\qquad \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \mathrm{K}(s_1,t_1) & \mathrm{K}(s_1,t_2) & \dots & \mathrm{K}(s_1,t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{K}(s_n,t_1) & \mathrm{K}(s_n,t_2) & \dots & \mathrm{K}(s_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

[La quantité $\mathrm{D}(\lambda)$ est dite le *déterminant* du noyau $\mathrm{K}(s,t)$.]

Puisque $|\mathrm{K}(s,t)|$ a une borne supérieure finie M dans son champ de variation, ces deux séries seront convergentes quel que soit λ. En effet d'après le théorème de M. Hadamard, on a

$$\left|\mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix}\right| < \sqrt{n^n}\,\mathrm{M}^n,$$

quand les variables restent dans (a,b). Donc les termes de $\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big)$ et de $\mathrm{D}(\lambda)$ restent en valeurs absolues respectivement inférieurs à ceux de

$$\mathrm{M} + 2|\lambda|\,(b-a)\,\mathrm{M}^2 + \dots + \frac{|\lambda|^n}{n!}\sqrt{(n+1)^{n+1}}\,(b-a)^n\,\mathrm{M}^{n+1} + \dots,$$
$$1 + |\lambda|\,\mathrm{M}\,(b-a) + \dots + \frac{|\lambda|^n}{n!}\sqrt{n^n}\,\big[\mathrm{M}\,(b-a)\big]^n + \dots.$$

Le rapport d'un terme au précédent est pour la première série de la forme

$$|\lambda|\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\,\frac{\sqrt{n+1}}{n}\,(b-a)\,\mathrm{M}$$

et pour la seconde

$$|\lambda|\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\,\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,(b-a)\,\mathrm{M};$$

dans les deux cas il tend vers zéro quel que soit λ. Ainsi les deux séries représentent deux fonctions *entières* de λ.

Les zéros de la fonction $\mathrm{D}(\lambda)$ sont déterminés par la fonction $\mathrm{K}(s,t)$ seule. On les appelle les *constantes caractéristiques du noyau* $\mathrm{K}(s,t)$. On sait (nº **5**, p. 6) qu'elles sont *isolées* les unes des autres. Lorsque λ n'est pas égal à une constante caractéristique, le quotient

$$\mathrm{K}(s,t,\lambda)=\frac{\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda}{\mathrm{D}(\lambda)} \tag{43}$$

représente une fonction de s, t bien déterminée. Quand λ varie, c'est une fonction méromorphe de λ qu'on appelle la *résolvante* du noyau $\mathrm{K}(s,t)$.

11. — Nous allons maintenant chercher à montrer que la fonction $k(s,t)=-\lambda\mathrm{K}(s,t,\lambda)$ *est la fonction réciproque* (nº **5**, p. 42) *de* $\lambda\mathrm{K}(s,t)$ *lorsque* λ *n'est pas une constante caractéristique*. Ce sera suffisant pour prouver que dans ce cas, l'équation de Fredholm a une solution continue unique donnée par la formule (9), p. 40.

Étudions d'abord le genre de discontinuité de $\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda$ par rapport aux s et t. On a en développant (42) par rapport à la première ligne

$$\mathrm{K}\begin{pmatrix} s, s_1, s_2, \dots, s_n \\ t, s_1, s_2, \dots, s_n \end{pmatrix} = \mathrm{K}(s,t)\,\mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{pmatrix} + \Delta_n$$

avec

$$\Delta_n = \Delta\begin{pmatrix} s, s_1, \dots, s_n \\ t, s_1, \dots, s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{K}(s,\ s_1) & \mathrm{K}(s,\ s_2) & \dots & \mathrm{K}(s,\ s_n) \\ \mathrm{K}(s_1,t) & \mathrm{K}(s_1,s_1) & \mathrm{K}(s_1,s_2) & \dots & \mathrm{K}(s_1,s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{K}(s_n,t) & \mathrm{K}(s_n,s_1) & \mathrm{K}(s_n,s_2) & \dots & \mathrm{K}(s_n,s_n) \end{vmatrix}.$$

En portant cette expression dans la formule (40), on a

$$\mathrm{D}\binom{s}{t}\lambda = \mathrm{D}(\lambda)\,\mathrm{K}(s,t) + \mathrm{R}(s,t,\lambda) \tag{44}$$

avec

$$\mathrm{R}(s,t,\lambda) = -\lambda\int_a^b \Delta_1\,ds_1 + \ldots + \frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_a^b\ldots\int_a^b \Delta_n\,ds_1\ldots ds_n + \ldots.$$

En développant Δ_n par rapport à la première ligne, on voit que le terme général de R est une somme de termes de la forme (6) considérée dans l'Introduction, p. 6, puisque $\mathrm{K}(s,t)$ est convergente presque partout ; donc R est une somme de termes continus. Et comme la série R est aussi uniformément convergente on voit qu'en définitive $\mathrm{R}(s,t,\lambda)$ est une fonction continue quand s, t varient dans a, b.

Dès lors, la formule (44) montre que $\mathrm{D}\binom{s}{t}\lambda$ *est une fonction qui a les mêmes points de discontinuité que* $\mathrm{K}(s,t)$.

D'autre part on a :

$$\int_a^b\ldots\int_a^b \Delta_n\,ds_1\ldots ds_n = \sum_{p=1}^{p=n}\int_a^b\ldots\int_a^b (-1)^p\,\mathrm{K}(s,s_p)\times$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{K}(s_1,t) & \mathrm{K}(s_1,s_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_1,s_{p-1}) & \mathrm{K}(s_1,s_{p+1}) & \ldots & \mathrm{K}(s_1,s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{K}(s_p,t) & \mathrm{K}(s_p,s_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_p,s_{p-1}) & \mathrm{K}(s_p,s_{p+1}) & \ldots & \mathrm{K}(s_p,s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{K}(s_n,t) & \mathrm{K}(s_n,s_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_n,s_{p-1}) & \mathrm{K}(s_n,s_{p+1}) & \ldots & \mathrm{K}(s_n,s_n) \end{vmatrix} ds_1\ldots ds_n$$

$$= -\sum_{p=1}^{p=n}\int_a^b\ldots\int_a^b \mathrm{K}(s,s_p)\times$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{K}(s_p,t) & \mathrm{K}(s_p,s_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_p,s_{p-1}) & \mathrm{K}(s_p,s_{p+1}) & \ldots & \mathrm{K}(s_p,s_n) \\ \mathrm{K}(s_1,t) & \mathrm{K}(s_1,s_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_1,s_{p-1}) & \mathrm{K}(s_1,s_{p+1}) & \ldots & \mathrm{K}(s_1,s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{K}(s_n,t) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathrm{K}(s_n,s_n) \end{vmatrix} ds_1\ldots ds_n$$

en remontant la $p^{ième}$ ligne jusqu'à la première place. Si ensuite on remplace $s_p, s_{p+1}, \ldots, s_n$, par $\tau, s_p, \ldots, s_{n-1}$ ce qui ne change rien dans la valeur de l'intégrale, on voit que le signe $\sum$ porte sur n intégrales égales à

$$\int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau) \begin{vmatrix} \mathrm{K}(\tau,\ t) & \mathrm{K}(\tau,\ s_1) & \ldots & \mathrm{K}(\tau,\ s_{n-1}) \\ \mathrm{K}(s_1,\ t) & \mathrm{K}(s_1,\ s_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_1,\ s_{n-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{K}(s_{n-1},t) & \mathrm{K}(s_{n-1},s_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_{n-1},s_{n-1}) \end{vmatrix} d\tau\, ds_1 \ldots ds_{n-1}$$

$$= \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,\mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1,\ldots,s_{n-1} \\ s_1,\ldots,s_{n-1}\end{pmatrix} d\tau\, ds_1 \ldots ds_{n-1}$$

$$+ \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\Delta\begin{pmatrix} \tau, s_1,\ldots,s_{n-1} \\ t, s_1,\ldots,s_{n-1}\end{pmatrix} d\tau\, ds_1 \ldots ds_{n-1}$$

En sorte que

$$\mathrm{R}(s,t,\lambda) =$$

$$-\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau \times \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \times n \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1,\ldots,s_{n-1} \\ s_1,\ldots,s_{n-1}\end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_{n-1}$$

$$-\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau) \left\{ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\, n \int_a^b \cdots \int_a^b \Delta\begin{pmatrix} \tau, s_1,\ldots,s_{n-1} \\ t, s_1,\ldots,s_{n-1}\end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_{n-1} \right\} d\tau$$

$$= \left[\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau\right] \times \lambda \mathrm{D}(\lambda) + \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,.\,\lambda\,.\,\mathrm{R}(\tau,t,\lambda)\,d\tau.$$

D'où

$$\mathrm{R}(s,t,\lambda) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\left\{\mathrm{K}(\tau,t)\,\mathrm{D}(\lambda) + \mathrm{R}(\tau,t,\lambda)\right\} d\tau.$$

En tenant compte de (44) on a enfin

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big) - \mathrm{D}(\lambda)\,\mathrm{K}(s,t) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{D}\begin{pmatrix} \tau \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big)\,d\tau.$$

En procédant avec les colonnes des déterminants comme nous avons fait avec les lignes, on obtiendrait de la même manière pour valeur du second membre

$$\lambda \int_a^b \mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ \tau \end{pmatrix} \lambda \Big) \mathrm{K}(\tau, t)\, d\tau.$$

On a ainsi l'identité fondamentale

$$\text{(45)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{D}\Big(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix}\ \lambda\Big) - \mathrm{D}(\lambda)\,\mathrm{K}(s,t) &= \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{D}\Big(\begin{matrix} \tau \\ t \end{matrix}\ \lambda\Big)\, d\tau \\ &= \lambda \int_a^b \mathrm{D}\Big(\begin{matrix} s \\ \tau \end{matrix}\ \lambda\Big)\,\mathrm{K}(\tau,t)\, d\tau. \end{aligned}$$

En particulier si λ n'est pas une constante caractéristique, $\mathrm{D}(\lambda)$ n'est pas nul, la formule (43) a un sens et on a

$$\text{(46)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{K}(s,t,\lambda) - \mathrm{K}(s,t) &= \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t,\lambda)\, d\tau \\ &= \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau,\lambda)\,\mathrm{K}(\tau,t)\, d\tau \end{aligned}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned} k(s,t) + \big[\lambda \mathrm{K}(s,t)\big] &= \int_a^b \big[\lambda \mathrm{K}(s,\tau)\big]\, k(\tau,t)\, d\tau \\ &= \int_a^b k(s,\tau)\big[\lambda \mathrm{K}(\tau,t)\big]\, d\tau \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

En résumé nous voyons que (d'après un raisonnement déjà employé au n° **5**, p. 42) **l'équation de Fredholm** (1bis) **où** $\mathrm{K}(s,t)$ **est une fonction continue presque partout** (n° **5**, p. 6), **où** $f(s)$ **est une fonction continue et où** λ **n'est pas une constante caractéristique** (n° **10**, p. 57), **admet une solution continue unique donnée par**

$$\text{(47)} \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t,\lambda)\, f(t)\, dt,$$

où $\mathrm{K}(s, t, \lambda)$ **est une fonction méromorphe de** λ **donnée par les formules** (43)**,** (40)**,** (41).

12. — On voit l'avantage de la méthode précédente sur la méthode d'itération : c'est que celle-ci ne réussissait que si, M étant la borne supérieure de $|\mathrm{K}(s,t)|$, on avait (n° **2**, p. 39)

$$|\lambda|\,\mathrm{M}\,(b-a) < 1$$

c'est-à-dire

$$|\lambda| < \frac{1}{\mathrm{M}\,(b-a)}.$$

Il est vrai qu'on peut traiter les autres cas au moyen de la généralisation de Schmidt que nous avons exposée plus haut, p. 44. Mais celle-ci ne fournit pas une formule générale unique comme la précédente et ne mène pas à une discussion aussi simple. Elle ne fournit pas une expression *explicite* du résultat, dans laquelle chaque terme soit directement donné par une expression analytique connue, ce qui est en général très important au point de vue des calculs théoriques.

Au point de vue du calcul numérique, au contraire, ceci constitue plutôt un *désavantage* de la méthode de Fredholm, puisque le calcul d'un terme ne sert en rien pour celui des suivants.

Mais ce désavantage est compensé par un avantage essentiel, celui d'une *convergence très rapide*, lequel est précisément en rapport avec ce fait que nos séries actuelles ont en λ, un rayon de convergence infini et les premières (5), (5′) un rayon de convergence fini. Les séries (40), (41) convergent à la façon des développements de fonctions entières, c'est-à-dire comme des progressions géométriques à raison *infiniment petite* à partir d'un rang assez élevé. Dans beaucoup de cas, les deux ou trois premiers termes suffiront, dans chacune d'elles, dès que λ ne sera pas trop grand.

La série (5′) représente, comme nous l'avons remarqué, le développement de $\varphi(s)$ suivant les puissances de λ, c'est-à-dire le quotient des deux séries (40), (41). Son rayon de convergence est égal au module

du premier pôle (en λ) de $\varphi(s)$, c'est-à-dire (voir plus loin, nº **19**) du premier zéro λ_1 de $\mathrm{D}(\lambda)$. Elle converge comme une progression géométrique de raison $\left|\frac{\lambda}{\lambda_1}\right|$; par conséquent, comme une progression de raison $\frac{1}{|\lambda_1|}$, s'il s'agit de la série (5).

Il faut enfin remarquer que, si l'on doit calculer *les constantes caractéristiques* [1] (nº **10**)—ce qui est indispensable dans les applications mentionnées au Chapitre I, — on ne peut employer notre première méthode qu'avec la généralisation de Schmidt, et même en prenant l'entier p du nº **6** d'autant plus grand qu'on veut calculer des constantes λ_n d'indice plus élevé.

13. *Noyaux infinis.* — Nous n'avons pas encore considéré le cas où le noyau $\lambda\mathrm{K}(s,t)$ tout en restant intégrable deviendrait infini en certains points. Fredholm a aussi indiqué pour ce cas une méthode qui revient à substituer à l'équation donnée une équation équivalente où le noyau est fini.

Revenons en effet à la formule (7), p. 40, en y remplaçant $\varphi_0(t)$ par une solution $\varphi(s)$ de l'équation (1bis) ; alors $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \ldots \varphi_{n+1} \equiv \varphi$ et nous aurons en remplaçant n par $n-1$ et $\mathrm{K}(s,t)$ par $\lambda\mathrm{K}(s,t)$

$$\varphi(s) - \lambda^n \int_a^b \mathrm{K}_n(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f_n(s) \tag{48}$$

où $f_n(s)$ est une fonction continue connue

$$f_n(s) \equiv f(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}_1(s,t)\,f(t)\,dt + \ldots + \lambda^{n-1} \int_a^b \mathrm{K}_{n-1}(s,t)\,f(t)\,dt. \tag{49}$$

On voit que $\varphi(s)$ est une solution de l'équation de Fredholm (48) où $\lambda\mathrm{K}$, f sont remplacés par $\lambda^n\mathrm{K}_n$, f_n. Inversement, soit $\varphi(s)$ une solution de l'équation (48). Si dans les relations (3), (4), on remplace φ_0 par φ, (K étant toujours changé en $\lambda\mathrm{K}$), φ_n sera aussi égal à φ. Il suffit alors

[1] Les constantes en question sont évidemment (voir plus loin, nº **19**) les pôles de $\mathrm{K}(s,t,\lambda)$.

d'ajouter membre à membre les n premières de ces équations (3), (4) pour constater que la fonction

$$\Psi = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1}}{n}$$

est une solution de (1bis). C'est d'ailleurs aussi évidemment une solution de (48) comme φ, donc $\Psi = \varphi$ et φ est bien une solution de (1bis). Les équations (1bis) et (48) sont donc équivalentes.

[En vue des applications numériques, il y a lieu d'observer que l'on obtient la transformée en λ^n de l'équation $D(\lambda) = 0$ relative au noyau $K(s,t)$ en égalant à zéro le «déterminant» du noyau n fois réitéré $K_n(s,t)$.]

Or, il arrive dans un grand nombre d'applications que le noyau $K(s,t)$ étant infini en certains points, on peut trouver une valeur de n pour laquelle le noyau réitéré K_n est borné. On sera donc ramené au cas précédent.

14. — La discussion des cas — qui se rencontrent fréquemment en Physique—où cette condition se trouve réalisée sera, contrairement à ce qui avait lieu dans tout ce qui précède, différente suivant le nombre des variables.

Soit d'abord une intégrale simple. *Nous supposerons que* $K(s,t)$ *n'est infini que pour* $s = t$ *et comme* $\dfrac{1}{|s-t|^\alpha}$; pour que K soit intégrable, il faut d'ailleurs que α qui est > 0, soit < 1. Pour préciser, supposons

$$K(s,t) = \frac{H(s,t)}{|s-t|^\alpha}$$

où $H(s,t)$ est une fonction bornée intégrable. On a

$$K_2(s,t) = \int_a^b K(s,\tau)\, K(\tau,t)\, d\tau.$$

Si M est la borne supérieure de $|H(s,t)|$, on aura :

$$|K_2(s,t)| \leqslant M^2 \int_a^b \frac{1}{|s-\tau|^\alpha} \frac{1}{|\tau-t|^\alpha}\, d\tau.$$

Or posons

$$\tau = sy + t(1-y),$$

l'intégrale deviendra

$$|s-t|^{1-2\alpha} \int_{\frac{a-t}{s-t}}^{\frac{b-t}{s-t}} \frac{dy}{|y|^\alpha \, |1-y|^\alpha}.$$

Donc :

$$|\mathrm{K}_2(s,t)| < \mathrm{M}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|y|^\alpha \, |1-y|^\alpha} \times |s-t|^{1-2\alpha} = \mathrm{P}_2 |s-t|^{1-2\alpha}$$

où P_2 est un nombre positif fixe.

De même, comme on a

$$\mathrm{K}_3(s,t) = \int_a^b \mathrm{K}_2(s,\tau)\, \mathrm{K}(\tau,t)\, d\tau$$

on aura

$$|\mathrm{K}_3(s,\tau)| < \mathrm{P}_3 |s-t|^{2-3\alpha}$$

et en général

$$|\mathrm{K}_n(s,t)| < \mathrm{P}_n |s-t|^{n-1-n\alpha}.$$

Soit alors n le premier entier supérieur à $\dfrac{1}{1-\alpha}$ (>1) ; on aura

$$n - 1 - n\alpha > 0.$$

Donc $\mathrm{P}_n |s-t|^{n-1-n\alpha}$ sera borné $\big($et $\leqslant \mathrm{P}_n (b-a)^{n-1-n\alpha}\big)$.

De sorte que le noyau de l'équation (48) sera fini.

En particulier, si $\alpha < \dfrac{1}{2}$, il suffira de prendre $n = 2$.

15. — Dans ce même cas $\alpha < \dfrac{1}{2}$, M. Hilbert a donné un moyen élégant de traiter *directement* l'équation (1bis) en modifiant la méthode de Fredholm pour le cas d'un noyau fini.

Il s'agit de tourner la difficulté provenant de ce que les termes des diagonales principales des déterminants

$$\mathrm{K}\begin{pmatrix} s, s_1, \ldots, s_n \\ t, s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix}$$

sont infinis sauf le premier comme étant égaux à

$$\mathrm{K}(s_1, s_1), \ldots, \mathrm{K}(s_n, s_n).$$

Pour cela, M. Hilbert remplace la fonction donnée $\mathrm{K}(s, t)$ par une fonction $\mathrm{K}_0(s, t)$ égale partout à $\mathrm{K}(s, t)$ sauf pour $s = t$ où l'on prend $\mathrm{K}_0(s, s) = 0$. Il est manifeste que la nouvelle équation intégrale obtenue sera entièrement équivalente à la première, car une intégrale simple ne change pas de valeur si l'on change la valeur de la fonction à intégrer en un seul point.

En opérant ainsi, les nouvelles expressions de $\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda$ et de $\mathrm{D}(\lambda)$ ne contiendront que des termes finis. Il reste à montrer que quoique $\mathrm{K}_0(s, t)$ ne soit pas bornée, ces deux séries sont convergentes.

En effet, considérons par exemple ce que devient

$$\mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ s_1, \ldots, s_n \end{pmatrix}.$$

En supposant d'abord $s_1 > s_2 > s_3 \ldots > s_n$, nous multiplierons la première ligne de ce déterminant (voir formule 42), par $(s_1 - s_2)^\alpha$, la seconde par $[(s_1 - s_2)^{-\alpha} + (s_2 - s_3)^{-\alpha}]^{-1} \ldots$, la dernière par $(s_{n-1} - s_n)^\alpha$. Les éléments du déterminant obtenu restent tous inférieurs, en valeur absolue, à un nombre fixe P. D'après le théorème de M. Hadamard (nº **9**, p. 55), on a donc

$$\left|\mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{pmatrix}\right| < (s_1 - s_2)^\alpha \left[(s_1 - s_2)^{-\alpha} + (s_2 - s_3)^{-\alpha}\right]^{-1} \ldots$$
$$(s_{n-1} - s_n)^\alpha \cdot \sqrt{n^n} \cdot \mathrm{P}^n$$

dans le domaine D défini par les inégalités $b > s_1 > s_2 \ldots > s_n > a$.

Or, les intégrales de $|K|$ dans chacun des $n!$ domaines analogues à D obtenus en permutant les s, sont égales. Le terme général u_n de la série (41) qui représente le «déterminant» $D(\lambda)$ relatif à K_0 est donc au plus égal à

$$(49^{\text{bis}}) \quad \begin{cases} |\lambda^n| \sqrt{n^n}\, P^n \int \cdots \int_D (s_1 - s_2)^\alpha \left[(s_1 - s_2)^{-\alpha} + (s_2 - s_3)^{-\alpha}\right]^{-1} \cdots \\ \left[(s_{n-2} - s_{n-1})^{-\alpha} + (s_{n-1} - s_n)^{-\alpha}\right]^{-1} (s_{n-1} - s_n)^\alpha\, ds_1 \dots ds_n. \end{cases}$$

Un changement de variables tel que $s_i = a + (b - a)s'_i$ ramène cette expression à la forme

$$|\lambda|^n (\sqrt{n})^n P^n (b - a)^{(1-\alpha)n} I_n$$

où I_n représente l'intégrale qui figure dans (49bis), mais étendue au domaine $1 > s_1 > s_2 \dots > s_n > 0$. Le calcul de I_n montre [1] que l'on peut écrire $I_n < \dfrac{A^n}{n^{n(1-\alpha)}}$ où A est un nombre fixe. De sorte qu'on a pour le terme général u_n de $D(\lambda)$

$$\sqrt[n]{|u_n|} < |\lambda|\, P(b - a)^{1-\alpha} A \times \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}.$$

Comme $\alpha < \dfrac{1}{2}$, $\sqrt[n]{|u_n|}$ tend vers zéro et la série $D(\lambda)$ est absolument convergente. M. Poincaré [2] est parvenu à étendre le procédé de M. Hilbert au cas où α est un nombre quelconque compris entre 0 et 1. Il arrive au résultat suivant : Soit n un entier quelconque supérieur à $\dfrac{1}{1-\alpha}$. On peut encore appliquer les formules de Fredholm (40), (41), (43), (47) comme si le noyau $K(s, t)$ était fini pourvu qu'on ait soin de supprimer dans le développement de chaque déterminant

---

(1) Voir Hilbert, *Grundzüge ...*, *Göttinger Nachrichten* (Erste Mitteilung), 1904, Heft 1, p. 84.

(2) *Remarques diverses sur l'équation de Fredholm.* Acta Mathematica, t. III, 1910, p. 73.

$\mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{pmatrix}$, tous ceux des termes qui sont de la forme

$$\pm \mathrm{K}(s_\alpha, s_\beta) \cdot \mathrm{K}(s_\beta, s_\gamma) \ldots \mathrm{K}(s_\lambda, s_\mu) \cdot \mathrm{K}(s_\mu, s_\alpha)$$

où les indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \alpha$ forment un cycle de $n+1$ lettres.

16. — S'il s'agit d'équations intégrales de la forme (1′) (p. 5), on admettra — pour se borner toujours aux seuls exemples vraiment usuels — que le noyau peut devenir infini lorsque les points M, P dont il dépend coïncident, et seulement dans ce cas ; que, de plus, il est alors de l'ordre de $\frac{1}{r^\alpha}$, α étant encore un exposant constant et r désignant la distance MP. Cela revient dire — si, par exemple, l'équation est à deux variables, de sorte que M est défini par deux coordonnées s_1, s_2 et P par deux coordonnées t_1, t_2, — que le noyau est de l'ordre de $\dfrac{1}{\left[(s_1-t_1)^2+(s_2-t_2)^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}}$.

Ce cas sera étudié dans une note à la fin du volume (note A, p. 155), où nous démontrerons que les méthodes exposées au nº précédent réussissent pour $\alpha < 2$ si, comme nous venons de le supposer, le nombre des variables est de deux.

17. Établissement de quelques formules. — Nous ne nous sommes pas occupés encore du cas exceptionnel où λ est égal à une constante caractéristique du noyau $\mathrm{K}(s,t)$. Pour y arriver, nous commencerons par le cas de *l'équation intégrale homogène*, celle qu'on obtient en supposant dans (1bis), p. 56, que $f(s) \equiv 0$. Il nous sera nécessaire auparavant d'établir quelques formules.

Tout d'abord, on tire évidemment des développements (40), (41) (valables quel que soit λ)

$$\int_a^b \mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \lambda \Big) \, ds = \int_a^b \mathrm{K}(s,s)\, ds - \lambda \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s, s_1 \\ s, s_1 \end{pmatrix} ds\, ds_1 + \ldots$$

et par suite

$$\frac{d}{d\lambda}\mathrm{D}(\lambda) = -\int_a^b \mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \lambda \Big)\, ds, \tag{50}$$

formule qu'on peut écrire aussi d'après (43)

$$(50^{\text{bis}}) \qquad \frac{d}{d\lambda} \log \mathrm{D}(\lambda) = -\int_a^b \mathrm{K}(s, s, \lambda)\, ds.$$

18. — La formule (50bis) permet d'établir le développement suivant les puissances de λ du logarithme du déterminant $\mathrm{D}(\lambda)$. Si, en effet, on utilise pour $\mathrm{K}(s, s, \lambda)$ le développement obtenu par notre première méthode, — c'est-à-dire celui que l'on déduit de la formule (8) (n° **3**, p. 40) en y changeant K en λK et $k(s,t)$ en $-\lambda\mathrm{K}(s,t,\lambda)$ d'après le n° **11** — il vient ($|\lambda|$ étant supposé plus petit que le module du premier zéro de $\mathrm{D}(\lambda)$)

$$(50^{\text{ter}}) \qquad -\frac{d}{d\lambda}\left[\log \mathrm{D}(\lambda)\right] = \int_a^b \mathrm{K}(s, s)\, ds + \lambda \int_a^b \mathrm{K}_2(s, s)\, ds + \dots \\ + \lambda^{n-1} \int_a^b \mathrm{K}_n(s, s)\, ds + \dots .$$

D'où (puisque $\mathrm{D}(0) = 1$)

$$\log \mathrm{D}(\lambda) = -\sum_n \frac{\lambda^n}{n} \int_a^b \mathrm{K}_n(s, s)\, ds.$$

19. Théorème. — *Si λ' est une constante caractéristique de $\lambda\mathrm{K}(s,t)$, c'est, pour quelque point (s,t), un pôle de la résolvante*

$$\mathrm{K}(s, t, \lambda) = \frac{\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda}{\mathrm{D}(\lambda)}.$$

Car pour qu'il en fût autrement, il faudrait que (quels que soient s, t) λ' soit racine de $\mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda$ et même racine d'un ordre de multiplicité p_1 au moins égal à l'ordre de multiplicité p de λ' considéré comme racine de $\mathrm{D}(\lambda)$. Or on tire de (50)

$$\frac{d^h}{d\lambda^h} \mathrm{D}(\lambda) = -\int_a^b \frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}} \mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}\lambda\, ds.$$

Si on fait dans cette identité $\lambda = \lambda'$, on aura

$$\frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}} \mathrm{D}\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \lambda' \Big) \equiv 0 \text{ pour } h = 1, 2, \ldots, p_1$$

et par suite

$$\frac{d^h}{d\lambda^h} \mathrm{D}(\lambda) = 0 \text{ pour } \lambda = \lambda' \text{ et } h = 1, \ldots, p_1.$$

Donc

$$p \geqslant p_1 + 1. \tag{51}$$

III. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE

20. — Considérons maintenant l'équation intégrale homogène

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{1^{ter}}$$

c'est-à-dire l'équation (1bis, p. 40) où l'on suppose le terme connu $f(s)$ identiquement nul. Elle admet évidemment la solution $\varphi(s) \equiv 0$. Si λ n'est pas une constante caractéristique, le théorème fondamental du nº **11**, nous apprend que cette solution est la seule. Il suffit donc d'examiner le cas où λ est une constante caractéristique.

Il est d'abord évident que s'il existe une solution non nulle de l'équation, il en existera une infinité d'autres qu'on obtiendrait en multipliant l'une d'elles par un facteur numérique arbitraire. On voit même que s'il existe plusieurs solutions linéairement indépendantes de (1ter), toute combinaison linéaire et homogène de celles-ci sera aussi une solution non identiquement nulle. Reste le problème d'existence qui est résolu par le théorème suivant.

21. Théorème. — **Si λ' est une constante caractéristique du noyau $\mathrm{K}(s,t)$, l'équation intégrale homogène**

$$\varphi(s) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{52}$$

admet au moins une solution $\varphi(s)$ non identiquement nulle.

En effet, d'après le n° **19**, la constante caractéristique λ' sera un pôle de la résolvante $\mathrm{K}(s,t,\lambda)$ d'un ordre r au moins égal à l'unité. Nous pourrons donc écrire cette résolvante sous la forme

$$\mathrm{K}(s,t,\lambda) \equiv \frac{\varphi_r(s,t)}{(\lambda'-\lambda)^r} + \frac{\varphi_{r-1}(s,t)}{(\lambda'-\lambda)^{r-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(s,t)}{(\lambda'-\lambda)} + \varphi_0(s,t,\lambda) \tag{53}$$

où $\varphi_r(s,t)$ est certainement non identiquement nulle et où $\varphi_0(s,t,\lambda)$ est une fonction de λ qui est holomorphe près de $\lambda = \lambda'$.

Nous utiliserons maintenant la relation (46) entre le noyau et sa résolvante sous la forme

$$\begin{aligned} -\mathrm{K}(s,t) + \mathrm{K}(s,t,\lambda) &= (\lambda-\lambda')\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t,\lambda)\,d\tau + \lambda'\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= (\lambda-\lambda')\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau,\lambda)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau + \lambda'\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau,\lambda)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau. \end{aligned} \tag{54}$$

Si nous substituons ensuite l'expression de $\mathrm{K}(s,t,\lambda)$ tirée de (53) dans (54) nous pourrons identifier les coefficients de

$$(\lambda'-\lambda)^{-1},\ (\lambda'-\lambda)^{-2},\ \ldots,\ (\lambda'-\lambda)^{-r}.$$

La dernière des relations ainsi obtenues sera

$$\varphi_r(s,t) = \lambda'\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_r(\tau,t)\,d\tau = \lambda'\int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_r(s,\tau)\,d\tau. \tag{55}$$

Cette formule nous montre qu'en donnant à t une valeur quelconque comprise entre a et b, la fonction $\varphi_r(s,t)$ vérifie l'équation (52). Or $\varphi_r(s,t)$ n'étant pas une fonction identiquement nulle en s et t, il existe au moins une valeur numérique θ comprise entre a et b telle que $\varphi_r(s,\theta)$ soit une fonction de s non identiquement nulle. Cette fonction étant solution de (52), le théorème est démontré.

Ce théorème est fondamental. Il peut en effet s'énoncer ainsi :

Si le déterminant d'une équation de Fredholm est nul, l'équation homogène correspondante a *au moins une solution non identiquement*

nulle. Si au contraire, le déterminant est différent de zéro, la formule (47) s'applique en particulier si $f(s)$ est identiquement nulle, quand on y prend encore pour $\varphi(s)$ une solution de l'équation (1) qui devient homogène puisque $f(s) \equiv 0$. Elle montre que *si* $\mathrm{D}(\lambda) \neq 0$, *toute solution de l'équation intégrale homogène est identiquement nulle.* En rapprochant ces énoncés du théorème fondamental du n° **11**, on a la proposition suivante :

Pour que l'équation de Fredholm (1bis) **admette une solution** (fournie d'ailleurs par la formule 47), **il faut et il suffit que l'équation homogène correspondante** (1ter) **n'ait pas d'autre solution que zéro.**

On a ainsi pour établir l'existence ou la non existence d'une solution de l'équation avec second membre, un procédé souvent commode en ce qu'il évite le calcul du déterminant.

On voit que pour s'assurer que le déterminant $\mathrm{D}(\lambda)$ est différent de zéro [que par conséquent la méthode des numéros précédents est valable et fournit une solution unique de l'équation (1bis)], il n'est pas nécessaire de calculer ce déterminant. Il suffit de constater que pour la même valeur de λ, l'équation homogène correspondante (1ter) n'a pas d'autre solution que zéro. Cette remarque sera d'une application constante dans la suite.

Remarque. — Nous avons obtenu plus haut dans le cas où λ est égal à une constante caractéristique λ', une solution $\varphi_r(s,t)$ de l'équation homogène (52) qui dépend d'un paramètre arbitraire t. Il y aurait donc une infinité de solutions, ce qui ne saurait nous étonner (n° **20**). Mais nous montrerons plus loin (n° **24**) qu'on les obtient toutes de la manière indiquée précédemment (n° **20**) ou d'une manière plus précise, que toute solution de l'équation (52) est une combinaison linéaire et homogène de solutions linéairement indépendantes en nombre au plus égal (n° **25**) au degré de multiplicité de la racine λ' de $\mathrm{D}(\lambda)$.

22. — Le théorème que nous venons de démontrer s'applique encore aux cas où le noyau devient infini, tels que nous les avons visés au n° **14** ; c'est-à-dire que dans ces cas, ou bien l'équation donnée

a une solution fournie par la méthode du n° **13** ou bien l'équation homogène correspondante a une solution non nulle. C'est en effet ce qui a lieu pour l'équation (48) et nous avons vu que cette dernière est équivalente à la proposée.

On étendra également ce résultat à la méthode de M. Hilbert (n° **15**).

23. — Pour trouver le nombre exact des solutions de l'équation homogène (52) pour chaque constante caractéristique λ', on a recours aux *mineurs* du déterminant $\mathrm{D}(\lambda)$.

On appelle ainsi avec M. Fredholm les séries

$$(56)\quad \mathrm{D}_p\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p \end{pmatrix}\lambda\Big) \equiv \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p \end{pmatrix} - \lambda \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p, \tau_1 \\ t_1, t_2, \dots, t_p, \tau_1 \end{pmatrix} d\tau_1 \\ + \dots + \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_p, \tau_1, \dots, \tau_n \\ t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_n \end{pmatrix} d\tau_1 \dots d\tau_n + \dots$$

On voit comme pour les séries (40), (41), que si $\mathrm{K}(s,t)$ est borné, la série (56) est uniformément convergente, quand les s, t varient de façon quelconque dans (a,b) et que λ a une valeur fixe quelconque. C'est donc une fonction entière de λ qui est continue par rapport à (s_h, t_h), $(h = 1, 2, \dots, p)$ en tout point où $\mathrm{K}(s_h, t_h)$ est continue.

On tire de la formule précédente (où l'on remplace $\tau_1, \dots, \tau_n$ par $s_{p+1}, \dots, s_{p+n}$)

$$\int_a^b \dots \int_a^b \mathrm{D}_p\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_p \\ s_1, \dots, s_p \end{pmatrix}\lambda\Big) ds_1\, ds_2 \dots ds_p \\ = \int_a^b \dots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_p \\ s_1, \dots, s_p \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_p \\ - \lambda \int_a^b \dots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_p, s_{p+1} \\ s_1, \dots, s_p, s_{p+1} \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_p\, ds_{p+1} + \dots \\ + \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_{n+p} \\ s_1, \dots, s_{n+p} \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_{n+p} + \dots.$$

D'où en comparant avec (41)

$$(57)\qquad \frac{d^p}{d\lambda^p}\,\mathrm{D}(\lambda) = (-1)^p \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{D}_p\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_p \\ s_1, \ldots, s_p \end{pmatrix}\!\lambda\Big)\, ds_1 \ldots ds_p.$$

Développons le déterminant

$$(58)\quad \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_p, \tau_1, \ldots, \tau_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_n \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \mathrm{K}(s_1,t_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_1,t_p) & \mathrm{K}(s_1,\tau_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_1,\tau_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{K}(s_p,t_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_p,t_p) & \mathrm{K}(s_p,\tau_1) & \ldots & \mathrm{K}(s_p,\tau_n) \\ \mathrm{K}(\tau_1,t_1) & \ldots & \mathrm{K}(\tau_1,t_p) & \mathrm{K}(\tau_1,\tau_1) & \ldots & \mathrm{K}(\tau_1,\tau_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{K}(\tau_n,t_1) & \ldots & \mathrm{K}(\tau_n,t_p) & \mathrm{K}(\tau_n,\tau_1) & \ldots & \mathrm{K}(\tau_n,\tau_n) \end{vmatrix}$$

par rapport à sa première ligne et intégrons par rapport à $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$.

Nous aurons

$$\begin{aligned} &\int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_p, \tau_1, \ldots, \tau_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_n \end{pmatrix} d\tau_1 \ldots d\tau_n \\ &\qquad \equiv \sum_{h=1}^{h=p} (-1)^{h+1}\,\mathrm{K}(s_1, t_h) \times \\ &\qquad \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, s_p, \tau_1, \ldots, \tau_n \\ t_1, \ldots, t_{h-1}, t_{h+1}, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_n \end{pmatrix} d\tau_1 \ldots d\tau_n \\ &\qquad + \sum_{h=1}^{h=n} (-1)^{p+h+1} \int_a^b \mathrm{K}(s_1, \tau_h) \times \\ &\qquad \left\{ \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_2, \ldots, s_p, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \tau_{h+1}, \ldots, \tau_n \\ t_1, \ldots, t_{p-1}, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_{h-1}, \tau_{h+1}, \ldots, \tau_n \end{pmatrix} \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{h-1}\, d\tau_{h+1} \ldots d\tau_n \right\} d\tau_h. \end{aligned}$$

Mais en faisant passer la $(p+h-1)^{ième}$ ligne au premier rang dans le déterminant qui figure dans l'accolade, on voit qu'en remplaçant les variables d'intégration $\tau_h, \tau_{h+1}, \tau_{h+2}, \dots, \tau_n$ par $\tau, \tau_h, \dots, \tau_{n-1}$, sa valeur deviendra la même quel que soit h, de sorte que la deuxième partie du second membre de l'égalité deviendra

$$n \int_a^b \mathrm{K}(s_1, \tau) \left\{ \int_a^b \dots \int_a^b \mathrm{K} \begin{pmatrix} \tau, s_2, \dots, s_{p-1}, s_p, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \\ t_1, \dots\dots, t_{p-1}, t_p, \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \end{pmatrix} d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \right\} d\tau$$

Multiplions maintenant l'égalité obtenue par $\dfrac{(-\lambda)^n}{n!}$ et faisons la somme de la série obtenue en portant dans (56) ; nous aurons

$$(59) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{D}_p \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p \end{pmatrix} \lambda \Bigg) \\ & \equiv \sum_{h=1}^{h=p} (-1)^{h+1} \mathrm{K}(s_1, t_h)\, \mathrm{D}_{p-1} \begin{pmatrix} s_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, s_p \\ t_1, \dots, t_{h-1}, t_{h+1}, \dots, t_p \end{pmatrix} \lambda \Bigg) \\ & \quad + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s_1, \tau)\, \mathrm{D}_p \begin{pmatrix} \tau, s_2, \dots, s_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p \end{pmatrix} \lambda \Bigg) d\tau. \end{aligned} \right.$$

En opérant avec une des p premières lignes autres que la première dans le développement de (58), on aurait de même obtenu

$$(60) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{D}_p \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p \end{pmatrix} \lambda \Bigg) \\ & \equiv \sum_{h=1}^{h=p} (-1)^{h+i} \mathrm{K}(s_i, t_h)\, \mathrm{D}_{p-1} \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_p \\ t_1, t_2, \dots, t_{h-1}, t_{h+1}, \dots, t_p \end{pmatrix} \lambda \Bigg) \\ & \quad + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s_i, \tau)\, \mathrm{D}_p \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, \tau, s_{i+1}, \dots, s_p \\ t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_p \end{pmatrix} \lambda \Bigg) d\tau. \end{aligned} \right.$$

En opérant de même avec les colonnes, on voit qu'on aura aussi

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{D}_p\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p \end{pmatrix}\lambda \Big) \\ &\equiv \sum_{h=1}^{h=p}(-1)^{h+i}\,\mathrm{K}(s_h, t_i)\,\mathrm{D}_{p-1}\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_{h-1}, s_{h+1}, \dots, s_p \\ t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_p \end{pmatrix}\lambda\Big) \\ &+\lambda\int_a^b \mathrm{K}(\tau, t_i)\,\mathrm{D}_p\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_p \\ t_1, \dots, t_{i-1}, \tau, t_{i+1}, \dots, t_p \end{pmatrix}\lambda\Big)\,d\tau. \end{aligned}\right.$$

24. — Reprenons maintenant l'équation intégrale homogène (52), λ étant égal à une constante caractéristique λ'. Soit donc $\mathrm{D}(\lambda') = 0$. Nous avons déjà observé que si l'équation

$$(62)\qquad \varphi(s) - \lambda'\int_a^b \mathrm{K}(s, t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

a q solutions $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \dots, \Phi_q(s)$, la fonction

$$(63)\qquad c_1\,\Phi_1(s) + c_2\,\Phi_2(s) + \dots + c_q\,\Phi_q(s)$$

sera aussi une solution quelles que soient les constantes $c_1, c_2, \dots, c_q$.

Nous allons donner une nouvelle démonstration de l'existence d'une solution de l'équation (62), démonstration beaucoup plus longue que celle du n° **21**, mais qui aura l'avantage de nous donner l'expression générale de toutes les solutions possibles.

Pour cela, utilisons les formules (53), (54), (55). Comme $\mathrm{D}(\lambda)$ est une fonction entière égale à 1 pour $\lambda = 0$, $\mathrm{D}(\lambda)$ n'est pas identiquement nulle et par suite les quantités

$$\mathrm{D}(\lambda),\ \frac{d}{d\lambda}\,\mathrm{D}(\lambda), \dots, \frac{d^p}{d\lambda^p}\,\mathrm{D}(\lambda), \dots$$

ne sont pas toutes nulles pour la valeur $\lambda = \lambda'$. Il résulte alors de la formule (57) que les fonctions

$$(64)\qquad \mathrm{D}_1\begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \end{pmatrix}\lambda'\Big), \dots, \mathrm{D}_2\begin{pmatrix} s_1, s_2 \\ t_1, t_2 \end{pmatrix}\lambda'\Big), \dots, \mathrm{D}_p\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p \end{pmatrix}\lambda'\Big), \dots$$

ne sont pas toutes identiquement nulles par rapport aux s et aux t. Soit q, l'indice de la première de ces fonctions qui n'est pas identiquement nulle. Nous allons montrer que toute solution continue de l'équation homogène (62) est de la forme (63) où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_q$ sont q solutions linéairement indépendantes — q étant le nombre que nous venons de fixer. — En effet, d'après (60), on aura

$$(65)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \ldots, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_q \end{pmatrix} \lambda' \\ = \lambda' \displaystyle\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_{i-1}, \tau, s_{i+1}, \ldots, s_q \\ t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_q \end{pmatrix} \lambda' \, d\tau \end{cases}$$

Puisque

$$\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{pmatrix} \lambda' \not\equiv 0$$

on peut supposer à partir de maintenant qu'on prenne pour les s et les t affectés d'indices, non pas des quantités variables, mais des valeurs numériques déterminées s', t' telles que l'on ait l'inégalité numérique,

$$(66)\qquad \mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, s'_2, \ldots, s'_q \\ t'_1, t'_2, \ldots, t'_q \end{pmatrix} \lambda' \neq 0.$$

Dans ces conditions, on voit qu'en posant

$$\varphi_i(s) \equiv \mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, s'_2, \ldots, s'_{i-1}, s, s'_{i+1}, \ldots, s'_q \\ t'_1, t'_2, \ldots, t'_{i-1}, t'_i, t'_{i+1}, \ldots, t'_q \end{pmatrix} \lambda'$$

la fonction $\varphi_i(s)$ sera une fonction continue non identiquement nulle qui d'après (65) vérifiera l'équation homogène (62). Il en sera de même de toute fonction obtenue en multipliant $\varphi_i(s)$ par une constante non nulle. Nous utiliserons les fonctions

$$(67)\qquad \Phi_i(s) = \frac{\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, \ldots, s'_{i-1}, s, s'_{i+1}, \ldots, s'_q \\ t'_1, \ldots, t'_{i-1}, t'_i, t'_{i+1}, \ldots, t'_q \end{pmatrix} \lambda'}{\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, s'_2, s'_3, \ldots, s'_q \\ t'_1, t'_2, t'_3, \ldots, t'_q \end{pmatrix} \lambda'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

comme solutions de l'équation homogène.

Il est facile de prouver, avec M. Plemelj, que ces q fonctions sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que si l'on a l'identité

$$l_1 \Phi_1(s) + \ldots + l_q \Phi_q(s) \equiv 0 \tag{68}$$

où $l_1, l_2, \ldots, l_q$ sont des constantes, ces constantes sont nécessairement toutes nulles. En effet, d'après la définition de $\Phi_i(s)$, on a

$$\Phi_i(s'_i) = 1, \quad \Phi_i(s'_k) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k \text{ et } i = (1, 2, \ldots, n).$$

En faisant maintenant $s = s'_1, s'_2, \ldots, s'_q$ dans (68), on obtient successivement

$$l_1 = 0,\ l_2 = 0,\ \ldots,\ l_q = 0.$$

Il reste à prouver que toute solution $\varphi_0(s)$ de l'équation (62) est de la forme (63). Pour cela remarquons que la fonction de s

$$\varphi_0(s) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi_0(t)\,dt \tag{69}$$

étant identiquement nulle, il en sera de même de l'expression

$$\lambda' \int_a^b g(s,t) \left\{ \varphi_0(t) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(t,\tau)\,\varphi_0(\tau)\,d\tau \right\} dt \tag{70}$$

où $g(s,t)$ est une fonction continue quelconque. D'où aussi, en retranchant les deux expressions (69), (70)

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_0(s) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi_0(t)\,dt - \lambda' \int_a^b g(s,t)\,\varphi_0(t)\,dt \\ + \lambda'^2 \int_a^b \int_a^b g(s,t)\,\mathrm{K}(t,\tau)\,\varphi_0(\tau)\,d\tau\,dt; \end{aligned}$$

ou en permutant les notations t, τ dans la dernière intégrale

$$\varphi_0(s) - \lambda' \int_a^b \mathrm{H}(s,t)\,\varphi_0(t)\,dt = 0 \tag{71}$$

avec

$$\text{(72)} \qquad \mathrm{H}(s,t) = \mathrm{K}(s,t) + \left\{ g(s,t) - \lambda' \int_a^b g(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau \right\}.$$

Servons-nous maintenant de l'identité (61) pour $i = 1$. En y remplaçant p par $q+1$, h par $h+1$, λ par λ' et s_1, t_1, s_{h+1}, t_{h+1} par s, t, s'_h, t'_h, elle devient :

$$\text{(73)} \quad \begin{cases} \mathrm{D}_{q+1}\begin{pmatrix} s, s'_1, \dots, s'_q \\ t, t'_1, \dots, t'_q \end{pmatrix} \lambda' \Big) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\mathrm{D}_{q+1}\begin{pmatrix} s, s'_1, \dots, s'_q \\ \tau, t'_1, \dots, t'_q \end{pmatrix} \lambda' \Big)\,d\tau \equiv \\ \mathrm{K}(s,t)\,\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, \dots, s'_q \\ t'_1, \dots, t'_q \end{pmatrix} \lambda' \Big) - \displaystyle\sum_{h=1}^{h=q} \mathrm{K}(s'_h,t)\,\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, \dots, s'_{h-1}, s, s'_{h+1}, \dots, s'_q \\ t'_1, \dots, t'_{h-1}, t'_h, t'_{h+1}, \dots, t'_q \end{pmatrix} \lambda' \Big). \end{cases}$$

Or, prenons en particulier pour $g(s,t)$ la fonction

$$g(s,t) = -\frac{\mathrm{D}_{q+1}\left(\begin{matrix} s, s'_1, s'_2, \dots, s'_q \\ t, t'_1, t'_2, \dots, t'_q \end{matrix}\ \lambda'\right)}{\mathrm{D}_q\left(\begin{matrix} s'_1, s'_2, \dots, s'_q \\ t'_1, t'_2, \dots, t'_q \end{matrix}\ \lambda'\right)}.$$

L'identité précédente deviendra

$$g(s,t) - \lambda' \int_a^b g(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau \equiv -\mathrm{K}(s,t) + \sum_{h=1}^{h=q} \mathrm{K}(s'_h,t)\,\Phi_h(s).$$

Et l'équation (72) pourra s'écrire

$$\mathrm{H}(s,t) = \mathrm{K}(s,t) - \left\{ \mathrm{K}(s,t) - \sum_{h=1}^{h=q} \mathrm{K}(s'_h,t)\,\Phi_h(s) \right\} = \sum_{h=1}^{h=q} \mathrm{K}(s'_h,t)\,\Phi_h(s).$$

En portant dans (71), on voit que

$$\varphi_0(s) = \lambda' \sum_{h=1}^{h=q} \Phi_h(s) \int_a^b \mathrm{K}(s'_h,t)\,\varphi_0(t)\,dt.$$

De sorte qu'en définitive $\varphi_0(s)$ s'exprime bien sous la forme (63) en prenant pour constantes c_h, les quantités

$$c_h = \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s'_h, t)\,\varphi_0(t)\,dt. \tag{74}$$

En résumé : *Si λ n'est pas une constante caractéristique, l'équation homogène de Fredholm* (1ter) *n'a aucune solution continue non identiquement nulle.*

Si λ est égal à une constante caractéristique λ', l'équation homogène (62), *a une infinité de solutions continues non identiquement nulles, et si q est l'indice de la première des fonctions* (64) *qui ne s'annule pas identiquement, toute solution continue est une combinaison linéaire de q fonctions continues linéairement indépendantes données*[1] *par les formules* (67).

D'après ce qui précède, *il existe une infinité de systèmes de fonctions continues tels que toute solution de l'équation intégrale homogène* (62) *soit une combinaison linéaire et homogène des fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ appartenant à l'un de ces systèmes.* (Il suffit en effet de prendre pour $\theta_1, \ldots, \theta_q$, q combinaisons linéaires, homogènes et indépendantes des fonctions Φ_i). *Nous dirons que $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ forment un système de fonctions fondamentales correspondant à la constante caractéristique λ' et au noyau* $\mathrm{K}(s, t)$.

25. Remarque. — Le nombre q des solutions indépendantes varie avec λ' ; on l'appelle l'*index* de la constante caractéristique λ'. D'autre part, λ' étant racine de $\mathrm{D}(\lambda)$, on peut définir son ordre de multiplicité $p \geqslant 1$.

Or, nous savons (n° **19**) que λ' est (pour quelque valeur de s, t) un pôle de la résolvante $\mathrm{K}(s, t, \lambda)$: soit r son ordre de multiplicité. On peut déterminer exactement q au moyen des $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \ldots$. Nous allons voir qu'il suffit de connaître r et p pour avoir une limite supérieure de q[2].

---

[1] Remarquons que la condition (66) est la seule imposée aux quantités s', t' ; de sorte que les fonctions Φ_i dépendront en général de $2q$ paramètres (du moins en apparence).

[2] H.-B. Heywood, *Thèse*, p. 16.

En effet, appelons $p_1, p_2, \ldots$ les ordres de multiplicité de λ' pour les fonctions $\mathrm{D}_1\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda\Big)$, $\mathrm{D}_2\begin{pmatrix} s_1, s_2 \\ t_1, t_2 \end{pmatrix}\lambda\Big)$, …. On a d'après (56)

$$\frac{d}{d\lambda}\mathrm{D}_k\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_k \\ t_1, \ldots, t_k \end{matrix}\ \lambda\right) = -\int_a^b \mathrm{D}_{k+1}\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_k, \tau \\ t_1, \ldots, t_k, \tau \end{matrix}\ \lambda\right) d\tau.$$

D'où :

$$p_{k+1} \leqslant p_k - 1.$$

D'où :

$$p_2 \leqslant p_1 - 1, \ldots, p_{q-1} \leqslant p_{q-2} - 1, \quad 1 \leqslant p_{q-1}.$$

En ajoutant les inégalités, on a

$$1 \leqslant p_1 - (q-2) \quad \text{ou} \quad p_1 \geqslant q - 1.$$

D'autre part, d'après la définition de $\mathrm{K}(s, t, \lambda)$, on a

$$r = p - p_1.$$

D'où :

$$r \leqslant p - (q-1)$$

et enfin

$$q \leqslant p - r + 1. \tag{74^{bis}}$$

En particulier, puisque $r \geqslant 1$, $q \leqslant p$; on a d'ailleurs par définition de q, $q \geqslant 1$; donc à une racine simple de $\mathrm{D}(\lambda)$ ne correspond qu'une fonction fondamentale.

26. Résolution de l'équation intégrale singulière avec second membre. — Revenons à l'équation intégrale avec second membre (1bis), mais où nous supposons que λ est égal à une constante caractéristique λ'. Non seulement le raisonnement qui nous a fourni l'expression (47) de la solution de l'équation (1bis) n'est plus valable, mais cette expression n'a plus de sens dans le cas actuel. Nous allons

montrer qu'il n'y a pas alors en général de solutions continues de l'équation

$$\varphi(s) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{75}$$

si $f(s)$ est une fonction continue quelconque. Mais il est évident que s'il y a une solution $\varphi(s)$ de cette équation et si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ sont les solutions indépendantes de l'équation homogène correspondante (62), la solution la plus générale de (75) est de la forme

$$\varphi(s) + c_1\,\theta_1(s) + \ldots + c_q\,\theta_q(s)$$

où $c_1, c_2, \ldots,$ sont des constantes arbitraires.

Pour étudier les conditions d'existence d'une solution de (75), nous allons introduire *l'équation associée* à l'équation homogène (62) ; ce sera par définition l'équation

$$\psi(s) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(t,s)\,\psi(t)\,dt = 0. \tag{76}$$

A chaque solution $\chi(s)$ de cette équation correspondra une condition de possibilité de l'équation donnée (75).

Supposons en effet que l'équation (75) ait une solution continue $\varphi(s)$. On aura en multipliant par $\chi(s)$ et intégrant

$$\begin{aligned}\int_a^b f(s)\,\chi(s)\,ds &= \int_a^b \varphi(s)\,\chi(s)\,ds - \lambda' \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,\chi(s)\,ds\,dt \\ &= \int_a^b \varphi(s) \left\{ \chi(s) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(t,s)\,\chi(t)\,dt \right\} ds = 0\end{aligned}$$

l'accolade étant nulle par définition de $\chi(s)$. Il faut donc qu'on ait

$$\int_a^b f(s)\,\chi(s)\,ds = 0$$

ce qui n'aura pas lieu pour une fonction $f(s)$ quelconque.

27. — Pour l'équation (76), le déterminant $D(\lambda)$ est le même que pour l'équation (62) ; les fonctions $K\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda$, ..., $D_p\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_p \\ t_1, \dots, t_p \end{pmatrix}\lambda$, ... pour (76), s'obtiennent en permutant les s avec les t dans les fonctions correspondantes pour (62). Il en résulte que si λ est égal à une constante caractéristique λ' de (62) correspondant à q solutions fondamentales, λ' sera aussi une constante caractéristique de (76) qui correspondra à q solutions analogues aux Φ_i

$$\Psi_i(s) = \frac{D_q\begin{pmatrix} s'_1, s'_2, \dots, s'_{i-1}, s'_i, s'_{i+1}, \dots, s'_q \\ t'_1, \dots\dots, t'_{i-1}, \ s, t'_{i+1}, \dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'}{D_q\begin{pmatrix} s'_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, s'_q \\ t'_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'} \tag{77}$$

(où l'expression D_q est celle qui correspond à (75) comme jusqu'ici).

Soient $\chi_1, \dots, \chi_q$ un système de fonctions fondamentales de (76) correspondant à λ'. On aura d'après le n° **26** les q conditions de possibilité

$$\int_a^b f(s)\chi_i(s)\,ds = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q). \tag{78}$$

Supposons maintenant que la fonction $f(s)$ satisfasse à ces q conditions. Les Ψ_i étant des combinaisons linéaires des χ_i, les conditions (78) peuvent s'écrire en remplaçant les χ_i par les Ψ_i.

Connaissant déjà la forme (9), p. 40, de la solution unique, dans le cas où λ n'est pas une constante caractéristique, il est naturel de chercher si l'on pourrait trouver une solution de l'équation (75) qui serait de la forme

$$\varphi(s) = f(s) - \lambda' \int_a^b G(s, t)\, f(t)\, dt \tag{79}$$

où $G(s, t)$ est une fonction à déterminer.

Il faudrait pour cela que l'on eut [en substituant cette expression

de $\varphi(s)$ dans (75)]

$$f(s) - \lambda' \int_a^b \mathrm{G}(s, t)\, f(t)\, dt - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, f(t)\, dt \\ + \lambda'^2 \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(s, \tau)\, \mathrm{G}(\tau, t)\, f(t)\, dt\, d\tau = f(s)$$

ou

$$\int_a^b f(t) \left\{ \mathrm{G}(s, t) + \mathrm{K}(s, t) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s, \tau)\, \mathrm{G}(\tau, t)\, d\tau \right\} dt = 0. \tag{80}$$

Si λ' n'était pas une constante caractéristique, on satisferait à cette équation en choisissant pour G une fonction telle que l'accolade fût identiquement nulle, il suffirait de prendre pour $\lambda'\mathrm{G}$ la fonction réciproque de $\lambda'\mathrm{K}$ et on retomberait sur la formule (47) déjà obtenue. Mais, λ' étant une constante caractéristique, et puisque nous admettons les conditions (78) réalisées, il suffit qu'on puisse choisir G de façon que l'accolade soit une combinaison linéaire des $\Psi_i(t)$ (à coefficients indépendants de t, sinon de s) pour que l'identité (80) ait lieu. Or la formule (59) peut s'écrire pour $p = q + 1$ sous une forme analogue à (73)

$$\mathrm{D}_{q+1}\begin{pmatrix} s, s'_1, \dots, s'_q \\ t, t'_1, \dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda' - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s, \tau)\, \mathrm{D}_{q+1}\begin{pmatrix} \tau, s'_1, s'_2, \dots, s'_q \\ t, t'_1, t'_2, \dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'\, d\tau \\ = \mathrm{K}(s, t)\, \mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, s'_2, \dots, s'_q \\ t'_1, t'_2, \dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda' \\ + \sum_{h=1}^{h=q} (-1)^h\, \mathrm{K}(s, t'_h)\, \mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, s'_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, s'_q \\ t, t'_1, \dots t'_{h-1}, t'_{h+1}, \dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'$$

ou en tenant compte de l'expression (77) des Ψ_i

$$\text{(81)}\quad \mathrm{K}(s,t) - \frac{\mathrm{D}_{q+1}\begin{pmatrix} s, s'_1, \dots, s'_q \\ t, t'_1, \dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'}{\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, \dots\dots, s'_q \\ t'_1, \dots\dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'} + \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\, \frac{\mathrm{D}_{q+1}\begin{pmatrix} \tau, s'_1, \dots, s'_q \\ t, t'_1, \dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'}{\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, \dots s'_q \\ t'_1, \dots t'_q \end{pmatrix}\lambda'} d\tau$$

$$= -\sum_{h=1}^{h=q} (-1)^h\, \mathrm{K}(s, t'_h)\, \Psi_h(t).$$

Donc en prenant

$$\text{(82)}\qquad \mathrm{G}(s,t) = -\frac{\mathrm{D}_{q+1}\begin{pmatrix} s, s'_1, \dots, s'_q \\ t, t'_1, \dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'}{\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, \dots\dots, s'_q \\ t'_1, \dots\dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'}$$

on voit que le premier membre de (80) se réduira à

$$\sum_{h=1}^{h=q} (-1)^{h+1}\, \mathrm{K}(s, t'_h) \int_a^b f(t)\, \Psi_h(t)\, dt = 0$$

d'après (81) et (82).

En résumé, *si λ' est une constante caractéristique, l'équation avec second membre (75) n'a pas en général de solution. Pour qu'elle ait une solution continue, il faut que $f(s)$ satisfasse aux q conditions*

$$\text{(83)}\qquad \int_a^b f(s)\chi_1(s)\, ds = 0,\ \dots,\ \int_a^b f(s)\chi_q(s)\, ds = 0$$

où les χ_i forment un système de solutions indépendantes de l'équation homogène associée. Et alors il y en a une infinité donnée par la formule

$$\varphi(s) = f(s) - \lambda' \int_a^b f(t)\, \frac{\mathrm{D}_{q+1}\begin{pmatrix} s, s'_1, \dots, s'_q \\ t, s'_2, \dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'}{\mathrm{D}_q\begin{pmatrix} s'_1, \dots\dots, s'_q \\ t'_1, \dots\dots, t'_q \end{pmatrix}\lambda'} dt + \sum_{h=1}^{h=q} c_h\, \theta_h(s)$$

où les θ_h sont les q solutions indépendantes de l'équation donnée privée de second membre.

28. *Remarque.* — Nous avons vu que toute constante caractéristique λ' de l'équation (62) était constante caractéristique de l'équation associée (76) et que le nombre des solutions linéairement indépendantes de ces deux équations intégrales homogènes est le même.

On peut montrer en outre que si deux solutions respectives de deux équations intégrales associées ne correspondent pas à la même constante caractéristique, elle sont orthogonales (voir n° **7**, p. 8). Car si l'on a :

$$\theta(s) = \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\theta(t)\,dt$$
$$\Psi(s) = \lambda'' \int_a^b \mathrm{K}(t,s)\,\Psi(t)\,dt$$

on aura

$$(\lambda' - \lambda'') \int_a^b \theta(s)\,\Psi(s)\,ds = \lambda'\lambda'' \int_a^b \int_a^b \theta(s)\,\mathrm{K}(t,s)\,\Psi(t)\,dt\,ds - \lambda''\lambda' \int_a^b \int_a^b \Psi(s)\,\mathrm{K}(s,t)\,\theta(t)\,dt\,ds.$$

Or la dernière intégrale devient égale à la précédente quand on y permute les variables d'intégration. Le premier membre étant nul, avec $\lambda' - \lambda'' \neq 0$, les fonctions θ, Ψ sont bien orthogonales.

28bis. Cas exceptionnel de M. Picard. — Nous avons vu (n° **14**, p. 64) que sous des conditions très larges, on peut étendre la méthode de Fredholm au cas où le noyau devient infini dans le domaine d'intégration. On pourrait être amené à penser qu'il est de même facile d'étendre la méthode au cas où le domaine d'intégration n'est pas borné. M. Picard a montré qu'il n'en est rien : non seulement la méthode de Fredholm suppose essentiellement que le domaine est borné, mais les propriétés

qu'elle permet de démontrer peuvent devenir complètement inexactes dans le cas contraire. Sans préciser toutes les particularités nouvelles qui peuvent se présenter dans ce cas exceptionnel et pour lesquelles nous renvoyons à la note de M. Picard [1], nous nous contenterons des indications suivantes qui suffisent pour mettre en garde contre une généralisation hâtive.

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$u''_t - \rho u(t) = f(t) \tag{84}$$

où $u(t)$ est la fonction inconnue et ρ une constante donnée, et servons-nous de l'identité

$$u''_t v(t) - u(t) v''_t = \frac{d}{dt}\left[u'_t v(t) - u(t) v'_t\right].$$

Nous y remplacerons $u(t)$ par une solution de l'équation (84) et $v(t)$ par une solution de l'équation

$$v''_t - \mu v(t) = 0,$$

où μ est une constante réelle positive. Prenons même en particulier la solution

$$v(t) = e^{\varepsilon\sqrt{\mu}\,(t-s)} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

qui dépend d'une constante arbitraire s. L'identité deviendra

$$(\rho - \mu)\, e^{\varepsilon\sqrt{\mu}\,(t-s)}\, u(t) + e^{\varepsilon\sqrt{\mu}\,(t-s)}\, f(t) = \frac{d}{dt}\left[\left(u'_t - \varepsilon\sqrt{\mu}\, u(t)\right) e^{\varepsilon\sqrt{\mu}\,(t-s)}\right].$$

En intégrant par rapport à t de $-\infty$ à s pour $\varepsilon = +1$ et de s à $+\infty$ pour $\varepsilon = -1$, on aura *si* $u(s)$ *et* $u'(s)$ *sont bornées et* $\mu > 0$

$$(\rho - \mu)\int_{-\infty}^{s} e^{-\sqrt{\mu}(s-t)}\, u(t)\, dt + \int_{-\infty}^{s} e^{-\sqrt{\mu}(s-t)}\, f(t)\, dt = u'_s - \sqrt{\mu}\, u(s),$$

$$(\rho - \mu)\int_{s}^{+\infty} e^{-\sqrt{\mu}(t-s)}\, u(t)\, dt + \int_{s}^{+\infty} e^{-\sqrt{\mu}(t-s)}\, f(t)\, dt = -u'_s - \sqrt{\mu}\, u(s),$$

et en ajoutant :

$$(\rho - \mu)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\mu}\,|s-t|}\, u(t)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\mu}\,|s-t|}\, f(t)\, dt = -2\sqrt{\mu}\, u(s). \tag{85}$$

---

[1] E. Picard, *Comptes Rendus* du 13 octobre 1910.

Prenons en particulier $\mu = 1$, on voit que toute solution $u(s)$ de (84) qui est bornée ainsi que sa dérivée est solution de l'équation

$$u(s) = \left(\frac{1-\rho}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s-t|}\, u(t)\, dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s-t|}\, f(t)\, dt, \tag{86}$$

laquelle est du type de Fredholm $\left(\text{en posant } \lambda = \frac{1-\rho}{2}\right)$ mais avec des *limites d'intégration infinies.*

Or, pour cette équation, les propriétés essentielles de l'équation de Fredholm cessent d'êtres vraies.

Supposons en effet $\rho > 0$, c'est-à-dire $\lambda < \frac{1}{2}$, alors on peut faire $\mu = \rho$ dans la formule (85) de sorte qu'on a

$$u(s) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\lambda}\,|s-t|}\, f(t)\, dt. \tag{87}$$

Si donc $f(t)$ est une fonction bornée non nulle, le second membre est une fonction bornée (ainsi que sa dérivée première), qui est solution de (84) et par conséquent de (86). On a donc pour solution d'une équation de Fredholm, une fonction *qui n'est évidemment pas en général méromorphe par rapport au paramètre* λ. Il y a plus : *les singularités de cette solution ne dépendent plus exclusivement du noyau comme dans le cas général* (n° **11**, p. 59), mais aussi du second membre.

Prenons en effet par exemple $f(t) = -\cos nt$, où n est une constante arbitraire ; on voit alors par un calcul facile que le terme indépendant de u dans l'équation (86) est ici :

$$\varphi(s) = \frac{\cos ns}{1+n^2}$$

et que la solution bornée de l'équation intégrale

$$u(s) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s-t|}\, u(t)\, dt = \frac{\cos ns}{1+n^2} \tag{88}$$

sera, d'après (87), ou plus simplement d'après (84)

$$u(s) = \frac{\cos ns}{\rho + n^2} = \frac{\cos ns}{1 + n^2 - 2\lambda}.$$

On voit bien que le pôle de cette fonction de λ, soit $\lambda = \dfrac{1+n^2}{2}$ dépend essentiellement de la fonction $\varphi(s)$ puisque le premier membre de (88) ne contient pas la constante n.

Supposons enfin $f(s) \equiv 0$; autrement dit, occupons-nous de l'équation intégrale homogène

$$u(s) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s-t|}\, u(t)\, dt = 0. \tag{89}$$

D'après ce qui précède toute solution de l'équation

$$u''_s - \rho u = 0 \quad \text{ou} \quad u''_s - (1-2\lambda)u = 0$$

qui est une fonction bornée (ainsi que sa dérivée u'_s) sera une solution de (89). Dès lors, pour $\rho < 0$ ou $\lambda > \dfrac{1}{2}$, la fonction $\cos(\sqrt{2\lambda - 1}\,.\,s)$ est une solution non nulle de (89). De sorte que toute valeur de $\lambda > \dfrac{1}{2}$ peut être considérée (n° **21**, p. 71) comme une constante caractéristique de (89). Ainsi, contrairement encore à la théorie générale (n° **10**, p. 57), on a *une équation intégrale homogène* (mais à limites infinies) *dont les constantes caractéristiques ne sont pas isolées.*

IV. — L'ÉQUATION DE FREDHOLM À NOYAU SYMÉTRIQUE ET LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE FONCTIONS FONDAMENTALES

29. — Étant donnée l'équation de Fredholm

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\, \varphi(t)\, dt = f(s) \tag{1^{bis}}$$

on dit que son noyau $\lambda\mathrm{K}(s,t)$ est *symétrique*, si l'on a

$$\mathrm{K}(s,t) \equiv \mathrm{K}(t,s).$$

On voit alors que cette équation ne diffère pas de son équation associée (2), p. 1, et l'on conçoit que ce fait puisse amener des simplifications. Cette prévision est confirmée pleinement par les travaux de Hilbert et de Schmidt principalement, qui ont examiné en détail ce cas particulier. Ils ont été guidés par le rapport étroit entre la question actuelle et la théorie des formes quadratiques et de «l'équation en s» [1]. En suivant encore la méthode qui a été exposée au n° **8**, p. 42, on voit en effet que si le noyau est symétrique, les équations (36bis), p. 42, où l'on remplace $\mathrm{K}(s,t)$ par $\lambda\mathrm{K}(s,t)$ peuvent être écrites sous la forme :

$$x_p - \lambda \frac{\partial}{\partial x_p}\, \mathfrak{K}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(s_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

où $\mathfrak{K}(x_1, \ldots, x_n)$ est une forme quadratique en $x_1, \ldots, x_n$. Et le déterminant des coefficients de $x_1, \ldots, x_n$ fournit quand on l'égale à zéro en y remplaçant λ par $\frac{1}{s}$, une équation de la forme dite «équation en s» [1]. M. Hilbert a procédé en suivant la méthode de passage à la limite, fondant en même temps la théorie des formes quadratiques infinies. M. Schmidt a ensuite attaqué directement la même question par la méthode des fonctions orthogonales (déf. au n° **7**, p. 8). L'importance de leurs résultats consiste surtout en ce que le cas du noyau symétrique est très fréquent dans les applications.

30. THÉORÈME. — *Deux solutions $\varphi(s)$, $\theta(s)$ d'une équation intégrale homogène à noyau symétrique, qui correspondent à deux constantes caractéristiques différentes λ', λ'', sont orthogonales* [2].

31. THÉORÈME. — *Un noyau symétrique réel ne peut avoir de constantes caractéristiques imaginaires.*

Supposons en effet que le déterminant $\mathrm{D}(\lambda)$ du noyau symétrique $\mathrm{K}(s,t)$ ait une racine imaginaire $\lambda' = \alpha + i\beta$; $\mathrm{D}(\lambda)$ étant à coefficients

---

[1] Voir par exemple, *Encyclopédie des sc. math.*, I, 11, p. 390.

[2] La proposition actuelle peut être considérée comme un cas particulier de celle du n° **28**.

réels admettra aussi la racine conjuguée $\lambda'' = \alpha - i\beta$. Nous avons vu que l'équation homogène a au moins une solution continue non identiquement nulle

$$\varphi(s) = \mathrm{P}(s) + i\mathrm{Q}(s)$$

quand λ est égal à une racine λ' de $\mathrm{D}(\lambda)$.

Si dans (62), p. 75, on remplace i par $-i$, on voit que la fonction

$$\theta(s) = \mathrm{P}(s) - i\mathrm{Q}(s)$$

est une solution non identiquement nulle de l'équation homogène (1[ter], p. 69), correspondant à une constante caractéristique $\lambda'' = \alpha - i\beta$ *différente* de λ'.

D'après le théorème précédent, on a donc

$$0 = \int_a^b \varphi(s)\,\theta(s)\,ds = \int_a^b (\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2)\,ds$$

et la fonction *continue* $\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 = \varphi(s)\,\theta(s)$ devrait être identiquement nulle sans qu'aucun de ses facteurs ne le soit.

La propriété actuelle généralise le fait qu'une «équation en s» à coefficients réels, n'a pas de racines imaginaires.

De ce que le déterminant $\mathrm{D}(\lambda)$ n'a pas de racines imaginaires, il ne s'ensuit pas nécessairement qu'il ait des racines réelles. On peut donner un exemple très simple d'un noyau continu réel qui n'a aucune constante caractéristique. Il suffit [1] de prendre $\mathrm{K}(s,t) \equiv \sin s \cos t$ en réduisant l'intervalle (a,b) à $(0,2\pi)$; car alors $\mathrm{D}(\lambda) \equiv 1$, tous les termes de son développement (41) s'annulant, sauf le premier.

L'équation de Volterra fournit un autre exemple important. On voit en effet d'après le n° **7**, p. 51, que cette équation a une solution continue quelle que soit la fonction continue $f(s)$ et pour toute valeur du paramètre λ. Il n'en peut être ainsi que si son déterminant $\mathrm{D}(\lambda)$ n'a pas de racines réelles. En fait, tous les déterminants tels que

[1] Heywood, *Loc. cit.*, p. 32. Journ. de Math. (6[e] série), t. IV, p. 310.

$\mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{pmatrix}$ (voir formule (42), p. 56) étant réduits à leurs éléments principaux, on a

$$\mathrm{D}(\lambda) = e^{-\lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,s)\,ds}.$$

32. — On voit alors l'importance de cette proposition.

Théorème. — *Tout noyau symétrique possède au moins une constante caractéristique* (1).

Je suppose bien entendu que le noyau $\mathrm{K}(s,t)$ n'est pas identiquement nul. Nous allons d'abord prouver qu'aucun des noyaux réitérés n'est identiquement nul. La formule (10), p. 40, montre immédiatement qu'ils sont symétriques et la formule (11) montre que si l'un est nul identiquement, il en est de même des suivants. Soit dans ce cas, K_{2m} le premier des noyaux de rang pair qui est identiquement nul. On a d'après (11)

$$\mathrm{K}_{2m}(s,s) = \int_a^b \mathrm{K}_m(s,\tau)\,\mathrm{K}_m(\tau,s)\,d\tau$$

et à cause de la symétrie

$$\mathrm{K}_{2m}(s,s) = \int_a^b \left[\mathrm{K}_m(s,\tau)\right]^2 d\tau.$$

Il faudrait donc que $\mathrm{K}_m(s,\tau)$ soit identiquement nul comme K_{2m} et comme m ne peut être égal à 1, K_{2m} ne serait pas le premier noyau réitéré identiquement nul et de rang pair. De plus la formule précédente montre que non seulement aucune des fonctions $\mathrm{K}_n(s,t)$ n'est identiquement nulle en s et t, mais encore aucune des fonctions $\mathrm{K}_n(s,s)$.

(1) Ce théorème a été énoncé par M. Schmidt sous la forme suivante : toute équation intégrale homogène à noyau symétrique continu possède au moins une solution continue non identiquement nulle. Grâce à la théorie de Fredholm, cet énoncé équivaut à celui du texte et, comme l'a montré M. Kneser, la démonstration de M. Schmidt s'en trouve un peu simplifiée.

D'autre part, d'après la formule (50ter), on a

$$(90)\qquad -\frac{1}{D(\lambda)}\frac{d}{d\lambda}D(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n \int_a^b K_{n+1}(s,s)\,ds = \sum_0^\infty \lambda^n U_{n+1}$$

en posant :

$$U_n = \int_a^b K_n(s,s)\,ds.$$

La série du troisième membre de (90) est convergente pour λ assez petit (nº 12, p. 61). Je vais prouver qu'elle n'est pas constamment convergente, c'est-à-dire que le premier membre n'est pas une fonction régulière en tout point à distance finie. Comme $D(\lambda)$ et $\dfrac{d}{d\lambda}D(\lambda)$ sont des fonctions entières, on en déduira que $D(\lambda)$ s'annule pour au moins une valeur finie de λ, autrement dit que le noyau possède au moins une constante caractéristique.

On a d'après l'inégalité de Schwarz (8′), p. 8

$$\left[\int_a^b\int_a^b K_{n-1}(s,t)\,K_{n+1}(s,t)\,ds\,dt\right]^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b \left[K_{n-1}(s,t)\right]^2 ds\,dt \times \int_a^b\int_a^b \left[K_{n+1}(s,t)\right]^2 ds\,dt.$$

Or la symétrie des noyaux nous permet de déduire de la formule (11), p. 40

$$K_{n+p}(s,s) = \int_a^b K_n(s,t)\,K_p(s,t)\,dt.$$

L'inégalité précédente devient donc

$$\left[\int_a^b K_{2n}(s,s)\,ds\right]^2 \leqslant \int_a^b K_{2n-2}(s,s)\,ds \times \int_a^b K_{2n+2}(s,s)\,ds$$

ou

$$[U_{2n}]^2 \leqslant U_{2n-2} \times U_{2n+2}.$$

D'ailleurs, aucun des noyaux réitérés n'étant identiquement nul l'expression

$$\mathrm{U}_{2n} = \int_a^b \left[\mathrm{K}_n(s, s)\right]^2 ds$$

est positive et non nulle pour toute valeur de n ; on peut donc écrire quel que soit n

$$\frac{\mathrm{U}_{2n+2}}{\mathrm{U}_{2n}} \geqslant \frac{\mathrm{U}_{2n}}{\mathrm{U}_{2n-2}} > 0$$

et par suite :

$$\frac{\mathrm{U}_{2n+2}}{\mathrm{U}_{2n}} \geqslant \frac{\mathrm{U}_4}{\mathrm{U}_2}.$$

Or dans la série (90) le rapport de deux termes, d'exposants impairs successifs, est égal en module à

$$|\lambda^2| \, \frac{\mathrm{U}_{2n+2}}{\mathrm{U}_{2n}}.$$

Il serait donc plus grand que 1 (et par suite le terme général d'exposant impair de la série ne tendrait pas vers zéro), pour

$$|\lambda| > \sqrt{\frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{U}_4}}.$$

Nous voyons bien que la série (90) est divergente pour de telles valeurs de λ et par conséquent que le noyau admet au moins une constante caractéristique comprise entre $-\sqrt{\frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{U}_4}}$ et $+\sqrt{\frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{U}_4}}$.

33. — La recherche des constantes caractéristiques, autrement dit, la résolution de l'équation $\mathrm{D}(\lambda) = 0$ se fait par les méthodes connues. On voit toutefois que l'application de l'une d'elles, la méthode de Gräffe, présente une simplification notable dans le cas actuel.

Le procédé de Gräffe consiste [1] à calculer une puissance des racines assez grande pour que leurs rapports deviennent considérables.

[1] Voir Carvallo, *Ann. Fac. Sciences Toulouse*, t. III, 1890.

Or, ici nous savons former *directement* l'équation qui a pour racines les valeurs de λ^m. Il suffit (n° **13**, p. 63) de remplacer le noyau K par le noyau réitéré K_m et d'égaler à zéro le déterminant correspondant. L'application de la méthode consiste donc tout simplement à écrire cette équation en prenant m suffisamment grand.

On peut remarquer aussi que la démonstration précédente donne un moyen de calculer approximativement la constante caractéristique λ_1 la plus petite en valeur absolue. En effet, son carré sera d'après le n° **13**, p. 63, la constante caractéristique la plus petite du noyau réitéré $K_2(s,t)$. Or, le déterminant $D_2(\mu)$ de celui-ci vérifie évidemment l'égalité analogue à (90)

$$\frac{1}{D_2(\mu)}\,\frac{d}{d\mu}\,D_2(\mu) = -\sum_0^\infty \mu^n\,U_{2n+2}.$$

D'ailleurs, d'après les inégalités du n° précédent, le rapport $\dfrac{U_{2n}}{U_{2n+2}}$ tend vers une limite déterminée $\mu_0 > 0$, donc la série du second membre a pour rayon de convergence μ_0. De sorte qu'on a

$$\lambda_1^2 = \mu_0 = \lim_{n=\infty} \frac{U_{2n}}{U_{2n+2}}.$$

J. Schur [1] a généralisé ce résultat de façon à calculer les autres constantes caractéristiques de proche en proche.

34. — Nous avons vu que chaque constante caractéristique d'un noyau quelconque est un pôle de la fonction réciproque. Ce pôle peut être simple ou multiple [2]. *Dans le cas où le noyau est symétrique,*

---

[1] *Math. Annalen*, t. 67, 1909, p. 327.

[2] Prenons, avec Korn, $K(s,t) \equiv \alpha s + \beta t$, α et β étant des constantes. En portant dans les expressions (40), (41) de $D\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\lambda$ et de $D(\lambda)$, on voit que les déterminants qui y figurent sont nuls dès qu'ils ont plus de deux colonnes. De sorte que $K(s,t,\lambda)$ se réduit à une fraction rationnelle en λ dont les termes sont de degrés respectifs 1 et 2. Si l'on prend par exemple $a = 0$, $b = 1$, on voit facilement que $K(s,t,\lambda)$ a, en général, deux pôles distincts qui se réduisent à un pôle double en λ pour $\beta = -3\alpha$.

ce pôle est toujours simple.

En effet, servons-nous des notations du n° 21, p. 71. La même méthode qui nous a fourni l'équation (55) nous donnera aussi, *si* $r > 1$

$$\varphi_{r-1}(s,t) = \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_{r-1}(\tau,t)\,d\tau + \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_r(\tau,t)\,d\tau.$$

Multiplions (55) et cette identité par $\varphi_{r-1}(s,t)$ et $\varphi_r(s,t)$ respectivement, intégrons par rapport à s de a à b et retranchons ; on aura :

$$(91)\qquad \begin{cases} 0 = \lambda' \displaystyle\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_r(\tau,t)\,\varphi_{r-1}(s,t)\,d\tau\,ds \\ \quad - \lambda' \displaystyle\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_{r-1}(\tau,t)\,\varphi_r(s,t)\,d\tau\,ds \\ \quad - \displaystyle\int_a^b \varphi_r(s,t)\left[\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_r(\tau,t)\,d\tau\right] ds. \end{cases}$$

Quand on permute les lettres s et τ dans la seconde intégrale double, on n'altère pas la valeur de cette intégrale et d'autre part, elle prend la forme qu'aurait la première intégrale double si on y remplaçait $\mathrm{K}(s,\tau)$ par $\mathrm{K}(\tau,s)$. Par suite de la symétrie du noyau, ces deux intégrales sont égales ; si on a soin de simplifier le crochet du dernier terme au moyen de (55), l'égalité (91) devient donc

$$\int_a^b \left[\varphi_r(s,t)\right]^2 ds = 0.$$

De sorte que, ayant supposé $r > 1$, on obtient $\varphi_r(s,t) \equiv 0$ contrairement à l'hypothèse.

Remarquons qu'il ne faudrait nullement conclure de ce qui précède que le dénominateur $\mathrm{D}(\lambda)$ de

$$\mathrm{K}(s,t,\lambda) = \frac{\mathrm{D}(s,t,\lambda)}{\mathrm{D}(\lambda)}$$

n'a que des racines simples. Au contraire l'ordre de multiplicité p d'une racine λ' de $\mathrm{D}(\lambda)$ est d'après la formule (74bis), p. 80, au moins égal au nombre q des fonctions fondamentales. En fait, M. Hilbert a démontré l'égalité de ces deux nombres : $p = q$ [1]. Ce fait fournit une nouvelle analogie avec les propriétés classiques de l'équation en s à racines multiples.

35. Développements en séries de fonctions fondamentales. Normalisation des fonctions fondamentales. — A chaque constante caractéristique λ' correspond un nombre fini (p. 75) de solutions linéairement indépendantes de l'équation intégrale homogène (62). Nous appellerons ici ces solutions : *fonctions fondamentales.* Si on remplace celles-ci par un système normalisé équivalent (p. 9), l'ensemble de fonctions obtenu en opérant ainsi successivement sur *toutes* les constantes caractéristiques formera lui-même un système normalisé, puisque deux fonctions fondamentales correspondant à deux constantes caractéristiques différentes sont déjà orthogonales (p. 90).

Si on range maintenant les constantes caractéristiques suivant l'ordre de grandeur de leurs valeurs absolues, chacune étant répétée autant de fois qu'elle a de fonctions fondamentales, on voit qu'on obtiendra une suite énumérable de constantes caractéristiques réelles

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots \tag{92}$$

suite à laquelle correspond un *système principal*, c'est-à-dire un ensemble normalisé réel

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \varphi_3(s),\ \ldots \tag{S}$$

de fonctions fondamentales, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$\varphi_n(s) = \lambda_n \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi_n(t)\,dt. \tag{93}$$

(1) Voir par exemple, Goursat, *Ann. Toulouse* 2 (10), p. 49.

D'après ce qui précède, toute fonction fondamentale $\Phi(s)$ correspondant au noyau $\mathrm{K}(s,t)$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions de la suite (S), à savoir de celles qui correspondent à la même constante caractéristique que $\Phi(s)$.

Mais d'autres fonctions que les solutions fondamentales sont aussi exprimables linéairement en fonction des $\varphi_n(s)$ — ne correspondant pas, bien entendu, à la même valeur de λ —. Nous nous proposons maintenant d'étudier ce mode de représentation dont nous savons déjà (page 11) déterminer les coefficients.

36. Développement du noyau. — Considéré comme fonction de s, le noyau $\mathrm{K}(s,t)$ peut-il être considéré comme une combinaison linéaire des $\varphi_n(s)$

$$\mathrm{K}(s,t) = c_1\,\varphi_1(s) + \dots + c_n\,\varphi_n(s) + \dots \qquad ? \tag{94}$$

D'après la méthode de la page 11, on voit qu'on aurait

$$c_n = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi_n(s)\,ds$$

ou en tenant compte de la symétrie de $\mathrm{K}(s,t)$ et de la formule de définition (93) des fonctions φ_n

$$c_n = \frac{\varphi_n(t)}{\lambda_n}.$$

Ainsi, on aurait

$$\mathrm{K}(s,t) = \frac{\varphi_1(s)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2} + \dots + \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n} + \dots. \tag{95}$$

Réciproquement *si la suite*

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \ \dots \tag{S}$$

désigne un système principal de solutions fondamentales correspondant aux constantes caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ *du noyau symétrique* $\mathrm{K}(s,t)$, *et si la série*



$$\frac{\varphi_1(s)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2} + \dots + \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n} + \dots \tag{96}$$

est limitée ou uniformément convergente, sa somme est égale au noyau $\mathrm{K}(s,t)$.

Soit $\mathrm{H}(s,t)$, la somme de la série, et posons

$$\mathrm{Q}(s,t) = \mathrm{K}(s,t) - \mathrm{H}(s,t).$$

La fonction $\mathrm{Q}(s,t)$ est symétrique ; si elle n'était pas identiquement nulle, en la considérant comme noyau d'une équation, on pourrait trouver (page 79), une constante c et une fonction continue $\psi(t)$ non identiquement nulle telle que l'on ait

$$\psi(t) = c\int_a^b \mathrm{Q}(t,\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(t)\,\varphi_n(t)\,dt = c\int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}(t,\tau)\,\varphi_n(t)\,dt\right]\psi(\tau)\,d\tau \\ - c\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_a^b\left[\int_a^b \varphi_p(t)\,\varphi_n(t)\,dt\right]\frac{\varphi_p(\tau)}{\lambda_p}\,\psi(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Si l'on tient compte de la formule de définition des φ_n et de ce que tout système principal est normé, on voit que les deux termes du second membre sont égaux, comme se réduisant à

$$\frac{c}{\lambda_n}\int_a^b \varphi_n(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau.$$

D'où enfin

$$\int_a^b \psi(t)\,\varphi_n(t)\,dt = 0. \tag{97}$$

Or, on a

$$\psi(t) = c\int_a^b \mathrm{Q}(t,\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = c\int_a^b \mathrm{K}(t,\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau - c\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\varphi_n(t)}{\lambda_n}\int_a^b \varphi_n(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau$$

donc d'après (97)

$$\psi(t) = c \int_a^b \mathrm{K}(t, \tau)\, \psi(\tau)\, d\tau.$$

Dès lors $\psi(t)$ serait une solution fondamentale relative au noyau $\mathrm{K}(t, \tau)$ et serait par suite une combinaison linéaire d'un nombre fini des φ_n

$$\psi(t) = \alpha_1\, \varphi_{n_1}(t) + \alpha_2\, \varphi_{n_2}(t) + \ldots + \alpha_q\, \varphi_{n_q}(t).$$

En multipliant par $\varphi_{n_p}(t)$ et intégrant, on aurait donc d'après (97)

$$0 = \int_a^b \psi(t)\, \varphi_{n_p}(t)\, dt = \alpha_{n_p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, q)$$

d'où :

$$\psi(t) \equiv 0$$

ce qui est impossible.

37. — Il résulte en particulier de ce qui précède que le noyau *pourra toujours être mis sous la forme* (95) *lorsque le nombre des constantes caractéristiques* (et par suite aussi le nombre, en général supérieur, des φ_n) *sera fini.* Nous avons déjà vu la réciproque de cette proposition (p. 46). De sorte que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau symétrique* $\mathrm{K}(s, t)$ *puisse être écrit sous la forme*

$$\mathrm{K}(s, t) = \mathrm{S}_1(s)\, \mathrm{S}_1(t) + \ldots + \mathrm{S}_n(s)\, \mathrm{S}_n(t)$$

où n *est un entier fini, est que le nombre des constantes caractéristiques soit fini.* Il est d'ailleurs bien évident que les noyaux de cette forme sont exceptionnels. Nous complétons ainsi le théorème du n° **32** ; non seulement un noyau symétrique possède au moins une constante caractéristique, mais en général il en possède une infinité.

38. Développement des noyaux réitérés. — Soit $\Phi(s)$ une solution fondamentale relative à la constante caractéristique λ', on a

$$\Phi(s) = \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, \Phi(t)\, dt$$

d'où

$$\Phi(s) = \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(s, s_1)\, \Phi(s_1)\, ds_1 = \lambda'^2 \int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}(s, s_1)\, \mathrm{K}(s_1, t)\, ds_1 \right] \Phi(t)\, dt$$

ou d'après (11)

$$\Phi(s) = \lambda'^2 \int_a^b \mathrm{K}_2(s, t)\, \Phi(t)\, dt$$

et en général

$$\Phi(s) = \lambda'^p \int_a^b \mathrm{K}_p(s, t)\, \Phi(t)\, dt. \tag{98}$$

Ainsi *toute fonction fondamentale d'un noyau est fonction fondamentale de chacun des noyaux réitérés correspondants.* Il résulte de plus du théorème précédent sur le développement de $\mathrm{K}(s,t)$ et de la formule (98) que si la série

$$\frac{\varphi_1(s)\, \varphi_1(t)}{\lambda_1^p} + \frac{\varphi_2(s)\, \varphi_2(t)}{\lambda_2^p} + \ldots + \frac{\varphi_n(s)\, \varphi_n(t)}{\lambda_n^p} + \ldots \tag{99}$$

est uniformément convergente, elle représente $\mathrm{K}_p(s,t)$. Je dis qu'il y a convergence absolue et uniforme au moins pour $p \geqslant 3$ [1]. En effet, la question ne se pose que si le nombre des constantes caractéristiques distinctes est infini ; je remarque qu'alors leurs valeurs absolues croissent au delà de toute limite (car ce sont les zéros d'une fonction entière $\mathrm{D}(\lambda)$). On pourra donc trouver un nombre q tel que pour $n > q$, on ait $|\lambda_n| > 1$. Alors pour $n > q$ et $p \geqslant 3$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{h=n}^{h=n+m} \left| \frac{\varphi_h(s)\, \varphi_h(t)}{\lambda_h^p} \right| &\leqslant \sum_{h=n}^{h=n+m} \left| \frac{\varphi_h(s)\, \varphi_h(t)}{\lambda_h^3} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2|\lambda_n|} \sum_{h=n}^{h=n+m} \frac{\varphi_h^2(s) + \varphi_h^2(t)}{\lambda_h^2} \end{aligned} \right. \tag{100}$$

---

[1] Ceci est encore vrai pour $p = 2$, mais la démonstration est différente. Voir par exemple Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie*, Teubner, 1900, p. 533.

d'après l'inégalité générale $|ab| < \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ et l'hypothèse que la suite des $|\lambda_h|$ ne va jamais en décroissant (p. 96). Or d'après l'inégalité de Bessel (11), p. 12, on a

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \left[\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi_h(t)\,dt\right]^2 \leqslant \int_a^b \bigl[\mathrm{K}(s,t)\bigr]^2\,dt;$$

en transformant le premier membre d'après (93), on a

$$\text{(101)} \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varphi_h^2(s)}{\lambda_h^2} \leqslant \int_a^b \bigl[\mathrm{K}(s,t)\bigr]^2\,dt$$

ce qui donne pour (100)

$$\sum_{h=n}^{h=n+m} \left|\frac{\varphi_h(s)\,\varphi_h(t)}{\lambda_h^p}\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda_n|} \int_a^b \bigl[\mathrm{K}(s,t)\bigr]^2\,dt$$

lorsque $p \geqslant 3$, $n > q$. Quand n croît indéfiniment, le second membre tend vers zéro avec $\dfrac{1}{\lambda_n}$. D'après le théorème de Cauchy sur la convergence des séries [1], cela suffit pour démontrer ce que nous avions en vue. Ainsi, *pour* $p \geqslant 3$ (voir la note précédente), *on a toujours*

$$\text{(102)} \qquad \mathrm{K}_p(s,t) = \frac{\varphi_1(s)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1^p} + \frac{\varphi_2(s)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2^p} + \ldots + \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n^p} + \ldots$$

où le second membre est nécessairement une série absolument et uniformément convergente.

---

[1] Si une série $\sum_{h=1}^{h=\infty} u_h(s,t)$ est telle que, à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un entier n pour lequel $\sum_{h=n}^{h=n+m} |u_h(s,t)| < \varepsilon$ quel que soit m, la série est absolument convergente et si l'inégalité a lieu quand s, t varient dans un domaine D, pour une valeur de n indépendante de s et de t, la convergence est uniforme.

39. — A cette occasion, on peut remarquer que *la série*

$$\frac{1}{\lambda_1^p}+\frac{1}{\lambda_2^p}+\ldots+\frac{1}{\lambda_h^p}+\ldots \tag{103}$$

est absolument convergente pour toute valeur de $p \geqslant 2$. Il suffit évidemment de le prouver pour $p=2$. Or d'après (101) on a

$$\sum_{h=1}^{h=m}\frac{\varphi_h^2(s)}{\lambda_h^2}\leqslant\int_a^b\left[\mathrm{K}(s,t)\right]^2 dt$$

quel que soit l'entier m ; d'où, en intégrant encore une fois, en tenant compte du fait que les fonctions φ_n ont été normalisées (nº **8**, p. 9)

$$\sum_{h=1}^{h=m}\frac{1}{\lambda_h^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b\left[\mathrm{K}(s,t)\right]^2 ds\,dt.$$

Ceci ayant lieu quel que soit m, prouve que la série (103) est convergente et même, de plus, que pour $p=2$ sa valeur est inférieure ou égale à l'intégrale

$$\int_a^b\int_a^b\left[\mathrm{K}(s,t)\right]^2 ds\,dt.$$

Ces deux propriétés ont été étendues par J. Schur [1] au cas dissymétrique. Comme dans ce cas les racines peuvent être imaginaires, il y a lieu de remarquer que la série (103) reste absolument convergente, mais que dans le cas de $p=2$, c'est pour la série des modules qu'on a

$$\frac{1}{|\lambda_1|^2}+\frac{1}{|\lambda_2|^2}+\ldots+\frac{1}{|\lambda_h|^2}+\ldots\leqslant\int_a^b\int_a^b\left[\mathrm{K}(s,t)\right]^2 ds\,dt.$$

En outre, il est entendu que dans la série (103), chaque constante caractéristique λ' doit être répétée autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité comme racine de $\mathrm{D}(\lambda)$. Dans le cas symétrique, notre démonstration remplace ce nombre par le nombre des fonctions

(1) *Math. Annalen*, t. LXVI, 1909, p. 501.

fondamentales correspondant à λ'. Nous avons fait remarquer (note 1, p. 96) que dans le même cas symétrique, ces deux nombres sont égaux.

40. Développements généraux. — Démontrons d'abord un lemme : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $l(s)$ vérifie l'identité

$$\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,l(t)\,dt = 0 \tag{104}$$

est que l'on ait quel que soit h

$$\int_a^b \varphi_h(s)\,l(s)\,ds = 0. \tag{105}$$

En effet, supposons vraie (104), on a d'après (93)

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi_h(s)\,l(s)\,ds &= \lambda_h \int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi_h(t)\,dt\right] l(s)\,ds \\ &= \lambda_h \int_a^b \varphi_h(t) \left[\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,l(s)\,ds\right] dt = 0\end{aligned}$$

quel que soit h.

Inversement, partons des relations (105). La série (102) étant uniformément convergente pour $p = 4$, et égale à $\mathrm{K}_4(s,t)$, on peut l'intégrer terme à terme après avoir multiplié par $l(s)\,l(t)$; on obtient ainsi

$$\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}_4(s,t)\,l(s)\,l(t)\,ds\,dt = \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{1}{\lambda_h^4} \int_a^b \varphi_h(s)\,l(s)\,ds \int_a^b \varphi_h(t)\,l(t)\,dt = 0.$$

En remplaçant K_4 par son expression, d'après (11), on a

$$\begin{aligned}0 &= \int_a^b \int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}_2(s,\tau)\,\mathrm{K}_2(\tau,t)\,d\tau\right] l(s)\,l(t)\,ds\,dt \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}_2(s,\tau)\,l(s)\,ds\right] \times \left[\int_a^b \mathrm{K}_2(\tau,t)\,l(t)\,dt\right] d\tau \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}_2(s,\tau)\,l(s)\,ds\right]^2 d\tau.\end{aligned}$$

Pour que l'intégrale de ce carré soit nulle, il faut que la quantité élevée au carré soit nulle, ou encore en la multipliant par $l(\tau)$ et intégrant :

$$\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}_2(s, \tau)\, l(s)\, l(\tau)\, ds\, d\tau = 0.$$

En recommençant le même raisonnement sur K_2 et K, comme nous venons de le faire sur K_4 et K_2, on obtient bien enfin (104).

Maintenant, nous nous proposons de développer en série de fonctions fondamentales, non pas une fonction absolument arbitraire, mais toute fonction $g(s)$ qu'on peut représenter par la formule

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, p(t)\, dt \tag{106}$$

où $p(t)$ est une fonction continue quelconque convenablement choisie.

Si l'on admet pour un instant la possibilité du développement de $g(s)$, on voit immédiatement (page 11) qu'il serait de la forme

$$\sum \varphi_h(s) \int_a^b g(t)\, \varphi_h(t)\, dt.$$

Or cette expression peut se remplacer terme à terme par

$$\begin{aligned}
&\sum \int_a^b \frac{\mathrm{K}(s, \tau)\, \varphi_h(\tau)}{\lambda_h}\, d\tau \times \int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}(t, \tau_1)\, p(\tau_1)\, d\tau_1\right] \varphi_h(t)\, dt \\
= &\sum \int_a^b \mathrm{K}(s, \tau)\, \varphi_h(\tau)\, d\tau \times \int_a^b p(\tau_1) \left[\int_a^b \frac{\mathrm{K}(t, \tau_1)\, \varphi_h(t)}{\lambda_h}\, dt\right] d\tau_1 \\
= &\sum \int_a^b \mathrm{K}(s, \tau)\, \varphi_h(\tau)\, d\tau \times \int_a^b p(\tau_1)\, \varphi_h(\tau_1)\, d\tau_1
\end{aligned}$$

et sous cette forme le lemme de la page 12 nous apprend qu'elle représente une série uniformément convergente.

Nous allons donc considérer *a priori* la fonction

$$l(s) \equiv g(s) - \sum_{h=1}^{h=\infty} \varphi_h(s) \int_a^b g(t)\, \varphi_h(t)\, dt$$

et montrer qu'elle est identiquement nulle.

On a quel que soit n

$$(107)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \varphi_n(s)\, l(s)\, ds \\ \displaystyle= \int_a^b g(s)\, \varphi_n(s)\, ds - \sum_{h=1}^{h=\infty} \int_a^b \varphi_n(s)\, \varphi_h(s)\, ds \times \int_a^b g(t)\, \varphi_h(t)\, dt = 0 \end{cases}$$

puisque le système des φ_h est normé. Donc d'après le lemme

$$(108)\qquad 0 = \int_a^b \mathrm{K}(s, \tau)\, l(\tau)\, d\tau.$$

D'autre part

$$\int_a^b \big[l(s)\big]^2\, ds = \int_a^b l(s)\, g(s)\, ds - \sum_{h=1}^{h=\infty} \int_a^b l(s)\, \varphi_h(s)\, ds \times \int_a^b g(t)\, \varphi_h(t)\, dt.$$

Le deuxième terme du second membre est nul d'après (107), le premier est égal d'après (106) à

$$\int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, l(s)\, ds\right] p(t)\, dt = 0$$

d'après (108). Donc $l(s)$ est bien identiquement nulle. Ainsi *toute fonction $g(s)$ de la forme*

$$(106)\qquad g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, p(t)\, dt$$

peut être représentée par une série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de la forme

$$(109)\qquad g(s) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \left[\int_a^b g(t)\, \varphi_h(t)\, dt\right] \varphi_h(s)$$

ou

$$(110)\qquad g(s) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \left[\frac{\int_a^b p(t)\,\varphi_h(t)\,dt}{\lambda_h} \right] \varphi_h(s).$$

En remplaçant $g(s)$ par son expression (106), en multipliant par une fonction continue arbitraire $q(s)$ et intégrant, on obtient une formule remarquable que M. Hilbert a obtenue par l'étude des formes quadratiques infinies

$$(111)\quad \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,p(t)\,q(s)\,ds\,dt = \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{1}{\lambda_h} \int_a^b p(t)\,\varphi_h(t)\,dt \times \int_a^b q(s)\,\varphi_h(s)\,ds.$$

41. — Appelons avec M. Hilbert, noyau *fermé*, un noyau $\mathrm{K}(s,t)$ tel qu'il n'existe aucune fonction $l(s)$ vérifiant l'identité :

$$\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,l(t)\,dt \equiv 0.$$

Pour simplifier les résultats, nous n'imposerons pas à la fonction $l(s)$ la condition d'être continue mais seulement d'être de carré intégrable.

D'après le lemme du n° **40**, on voit que si un noyau symétrique n'est pas fermé, il existe au moins une fonction $l(s)$ qui est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales et réciproquement. C'est ce qu'on exprime en disant que le système orthogonal des fonctions fondamentales n'est pas complet. Autrement dit, *un noyau symétrique fermé est un noyau dont le système principal des fonctions fondamentales forme un système orthogonal complet.*

Il en résulte en particulier qu'un *noyau fermé possède toujours une infinité de constantes caractéristiques distinctes.* Sans quoi il n'aurait qu'un nombre fini de fonctions fondamentales qui devrait former un système complet. Or on peut toujours évidemment former une fonction qui soit orthogonale à un nombre fini de fonctions données.

En outre, un noyau fermé est tel qu'on peut, autant que l'on veut, approcher de toute fonction $g(s)$ de carré intégrable au moyen d'une combinaison linéaire convenable d'un nombre fini de fonctions fondamentales [1]. L'approximation doit être entendue ici au sens de la théorie des erreurs. C'est-à-dire qu'étant donnés la fonction $g(s)$ et le nombre positif ε, on peut choisir des nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n$, tels que l'on ait :

$$\int_a^b \left[g(s) - c_1\,\varphi_1(s) - c_2\,\varphi_2(s) \ldots - c_n\,\varphi_n(s)\right]^2 ds < \varepsilon.$$

42. Développement de la solution de l'équation de Fredholm à noyau symétrique. — Soit l'équation

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

où $\mathrm{K}(s,t)$ est une fonction symétrique. S'il y a une solution continue, on peut l'écrire

$$\varphi(s) = f(s) + g(s)$$

en posant

$$g(s) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

D'après le paragraphe précédent, on peut développer $g(s)$ sous la forme d'une série uniformément convergente de fonctions fondamentales

$$g(s) = \sum_{h=1}^{h=\infty} c_h\,\varphi_h(s)$$

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{h=1}^{h=\infty} c_h\,\varphi_h(s).$$

[1] E. FISCHER, *Comptes Rendus*, t. 144, p. 1148.

Il ne reste plus qu'à déterminer les c_h. Pour cela substituons dans l'équation intégrale (1bis), l'expression trouvée

$$f(s) + \sum_{h=1}^{h=\infty} c_h \varphi_h(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t) f(t)\,dt + \sum_{h=1}^{h=\infty} \left[\lambda c_h \int_a^b \mathrm{K}(s,t) \varphi_h(t)\,dt\right]$$

ou, d'après (93)

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} c_h \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_h}\right] \varphi_h(s) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t) f(t)\,dt. \tag{112}$$

Or, d'après le paragraphe précédent, on a encore

$$\int_a^b \mathrm{K}(s,t) f(t)\,dt = \sum_{h=1}^{h=\infty} \left[\frac{\int_a^b f(t)\varphi_h(t)\,dt}{\lambda_h}\right] \varphi_h(s).$$

De sorte que l'égalité (112) devient :

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \left\{ c_h \left(\frac{\lambda_h - \lambda}{\lambda_h}\right) - \lambda \int_a^b \frac{f(t)\varphi_h(t)\,dt}{\lambda_h} \right\} \varphi_h(s) \equiv 0. \tag{113}$$

Les fonctions φ_h formant un système normé, nous avons vu (p. 9) qu'elles étaient indépendantes, c'est-à-dire que l'accolade précédente est nulle.

1° Si donc λ n'est pas une constante caractéristique, on a

$$c_h = \lambda \int_a^b \frac{f(t)\varphi_h(t)}{\lambda_h - \lambda}\,dt.$$

De sorte que, s'il y a une solution continue de l'équation intégrale (1bis), elle s'obtient sous la forme

$$\varphi(s) = f(s) - \lambda \sum_{h=1}^{h=\infty} \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_h} \int_a^b f(t)\varphi_h(t)\,dt\right] \varphi_h(s) \tag{114}$$

et le calcul précédent lui-même nous montre qu'une telle expression vérifie bien l'équation. Dès lors, *si λ n'est pas une constante caractéristique, l'équation intégrale* (1bis) *à noyau symétrique a une solution continue unique et donnée par la formule* (114). On voit de plus que si, pour une valeur déterminée de λ, la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi_h(s)\,\varphi_h(t)}{\lambda_h - \lambda}$$

est uniformément convergente en t, on pourra écrire la solution correspondante sous la forme déjà obtenue

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t, \lambda)\, f(t)\, dt, \tag{47}$$

mais ici avec

$$\mathrm{K}(s, t, \lambda) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varphi_h(s)\,\varphi_h(t)}{\lambda_h - \lambda}.$$

L'expression (114) de $\varphi(s)$ présente sur celle de Fredholm l'avantage de mettre en évidence le caractère méromorphe de la solution par rapport à λ, en précisant la partie principale relative à chaque pôle λ.

2° Si λ est égal à une constante caractéristique λ', elle correspondra à un nombre fini de fonctions fondamentales

$$\varphi_{n+1}(s),\ \ldots,\ \varphi_{n+q}(s),$$

et on aura

$$\lambda' = \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+q}.$$

Alors, on voit que l'identité (113) n'aura pas lieu en général, car les coefficients de $\varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+q}$ se réduisent à des quantités indépendantes de c_h

$$-\int_a^b f(t)\,\varphi_h(t)\,dt \qquad (h = n+1, \ldots, n+q) \tag{115}$$

en général différentes de zéro.

Il ne peut donc y avoir de solutions continues que si ces q quantités sont nulles (voir p. 81) et alors on peut prendre

$$c_{n+1},\ \ldots,\ c_{n+q}$$

arbitrairement, les autres c_h étant déterminés comme précédemment, de sorte qu'on aura pour solution

$$(116)\quad \varphi(s) = f(s) + c_{n+1}\,\varphi_{n+1}(s) + \ldots + c_{n+q}\,\varphi_{n+q}(s) + \left(\sum_{h=1}^{h=n} + \sum_{h=n+q+1}^{h=\infty}\right)\left\{\frac{\lambda'}{\lambda'-\lambda_h}\varphi_h(s)\int_a^b f(t)\,\varphi_h(t)\,dt\right\}.$$

Ainsi lorsque λ est égal à une constante caractéristique λ', il n'y a pas, en général, de solution continue de l'équation intégrale (1bis). Il ne peut y en avoir que si (λ étant égal à $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{n+q}$), les q conditions

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_h(t)\,dt = 0 \qquad (h = n+1, \ldots, n+q)$$

sont satisfaites. Nous retrouvons ici les résultats de la page 84. Mais de plus, nous voyons que *dans le cas symétrique, s'il y a une solution continue de* (1bis), *elle est donnée par la formule* (116) *où les c sont q paramètres arbitraires.*

43. Noyau dissymétrique. — M. Schmidt a étendu au cas dissymétrique la notion de fonctions fondamentales. Étant donné le noyau dissymétrique $\mathrm{K}(s,t)$, il appelle *couple de fonctions fondamentales conjuguées* un couple de deux fonctions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ non identiquement nulles et satisfaisant aux deux équations

$$(117)\qquad \varphi(s) = \lambda\int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\psi(t)\,dt$$

$$(118)\qquad \psi(s) = \lambda\int_a^b \mathrm{K}(t,s)\,\varphi(t)\,dt.$$

On voit qu'en éliminant ψ, puis φ entre les deux équations (117), (118), on aura :

$$\varphi(s) = \lambda^2 \int_a^b \overline{\mathrm{K}}(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$
$$\psi(s) = \lambda^2 \int_a^b \underline{\mathrm{K}}(s,t)\,\psi(t)\,dt,$$

en posant

$$\overline{\mathrm{K}}(s,t) = \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(t,\tau)\,d\tau$$
$$\underline{\mathrm{K}}(s,t) = \int_a^b \mathrm{K}(\tau,s)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau.$$

Donc φ et ψ sont les solutions de deux équations intégrales homogènes dont les noyaux $\overline{\mathrm{K}}$ et $\underline{\mathrm{K}}$ sont évidemment chacun symétrique. Il en résulte que les équations (117), (118) ne peuvent être vérifiées que pour certaines valeurs de λ $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots)$ telles que λ^2 soit une constante caractéristique de $\overline{\mathrm{K}}$ et de $\underline{\mathrm{K}}$. Ces valeurs de λ que nous pourrons appeler constantes fondamentales du noyau K sont en général distinctes des constantes caractéristiques ; et les fonctions fondamentales ne sont pas en général des solutions de l'équation de Fredholm homogène (1ter), p. 69.

D'après ce qui précède, λ^2 est réel. M. Schmidt démontre même que λ^2 est positif de sorte que λ est aussi réel. Il prouve ensuite qu'une fonction de la forme

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,h(t)\,dt$$

se développe en série uniformément et absolument convergente de fonctions $\varphi(s)$ comme au n° **40**. Et de même une fonction de la forme

$$g_1(s) = \int_a^b \mathrm{K}(t,s)\,h_1(t)\,dt$$

se développe en série de fonctions $\psi(s)$.

Il montre aussi que si la série

$$\sum \frac{\varphi_n(s)\,\psi_n(t)}{\lambda_n}$$

est uniformément convergente, elle représente $K(s, t)$.

M. Schmidt est parvenu aussi à établir plusieurs des résultats que fournit la méthode de Fredholm dans le cas dissymétrique en ramenant ce cas au cas symétrique.

Il montre que les solutions $\varphi(s)$ de l'équation dissymétrique

$$\varphi(s) = \lambda' \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

sont aussi des solutions de l'équation

$$\varphi(s) = \lambda' \int_a^b Q(s, t, \lambda')\,\varphi(t)\,dt$$

et réciproquement, en désignant par $Q(s, t, \lambda)$, la fonction *symétrique* :

$$Q(s, t, \lambda) = K(s, t) + K(t, s) - \lambda \int_a^b K(\tau, s)\,K(\tau, t)\,d\tau.$$

Mais, il faut remarquer la difficulté introduite par le fait que le noyau symétrique $\lambda Q(s, t, \lambda)$ contient le paramètre λ autrement qu'en facteur.

44. — On peut aussi appliquer directement au cas dissymétrique la méthode des fonctions orthogonales. Elle permet de retrouver le résultat fondamental de Fredholm : l'équation intégrale (1bis) a une solution continue unique, sauf pour des valeurs exceptionnelles de λ ; et c'est seulement pour ces valeurs exceptionnelles de λ que la *même* équation (1bis), privée de second membre, admet une solution continue non identiquement nulle.

L'intérêt de cette méthode consiste en ce qu'elle s'applique aussi facilement en remplaçant partout la condition de continuité pour les fonctions considérées par la condition infiniment plus générale que leurs carrés soient sommables (intégrables au sens de M. Lebesgue [1]). Il faudra,

[1] LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration.* Paris, 1905.

par contre, considérer comme identiques deux fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, telles que

$$\int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x)\right]^2 dx = 0$$

(égalité qui, en fait, n'empêche pas deux fonctions discontinues f_1, f_2, d'être différentes en une infinité de points).

On voit alors directement sur l'équation (1bis) et au moyen de l'inégalité de Schwarz (8), p. 8 qu'en tout point s_0 où $f(s)$ et $\mathrm{K}(s,t)$ sont à la fois continues, la solution $\varphi(s)$ est aussi continue (1)

45. Noyau de la forme $\mathrm{K}(s,t)\,p(t)$**.** — M. Erhard Schmidt a montré que le cas du noyau $\mathrm{K}(s,t)\,p(t)$, où $\mathrm{K}(s,t)$ est symétrique et $p(t)$ est une fonction qui est toujours positive ou nulle, se réduit au cas symétrique. Considérons l'équation

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,p(t)\,\varphi(t)\,dt = f(s).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par la fonction $+\sqrt{p(s)}$ qui est réelle et uniforme. On a

$$\varphi(s)\sqrt{p(s)} - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\sqrt{p(s)}\sqrt{p(t)}\,.\,\varphi(t)\sqrt{p(t)}\,dt = f(s)\sqrt{p(s)}.$$

Si nous prenons pour fonction inconnue la fonction $\varphi(s)\sqrt{p(s)}$, cette équation devient une équation de noyau symétrique $\mathrm{K}(s,t)\sqrt{p(s)}\sqrt{p(t)}$.

Cette généralisation a une certaine importance dans les applications, comme nous le verrons plus tard.

---

(1) F. Riesz, *Comptes-Rendus* du 8 avril 1907.

CHAPITRE III

—

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES POSÉS AU PREMIER CHAPITRE

I. — INTRODUCTION

1. — Nous commençons par un résumé des résultats du second Chapitre dont nous nous servirons après les avoir transformés conformément au nº **3**, p. 4.

Les équations associées de Fredholm

$$\varphi(\mathrm{M}) - \lambda \int_{\mathrm{S}} \varphi(\mathrm{P})\, \mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = f(\mathrm{M}), \tag{1}$$

$$\psi(\mathrm{M}) - \lambda \int_{\mathrm{S}} \psi(\mathrm{P})\, \mathrm{K}(\mathrm{P},\mathrm{M})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = g(\mathrm{M}), \tag{2}$$

où l'intégrale s'étend à une surface S fermée dont $d\sigma_{\mathrm{P}}$ est l'élément d'aire au point P, et où M est un point fixe de la surface, ont chacune une solution unique *en général*. (Dans ces équations, l'intégration peut également s'étendre à un domaine D limité par une surface S, $d\sigma_{\mathrm{P}}$ étant un élément de volume).

Si nous faisons $f(\mathrm{M}) \equiv 0$, la solution correspondante $\varphi(\mathrm{M})$ sera nulle identiquement *en général.*

Il y a cependant un nombre fini ou infini de *constantes caractéristiques*

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots \tag{Σ}$$

(qu'on peut ranger par ordre de modules non décroissants), telles que pour $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les équations homogènes

$$\varphi(\mathrm{M}) - \lambda \int_{\mathrm{S}} \varphi(\mathrm{P})\, \mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = 0 \tag{2'}$$

$$\psi(\mathrm{M}) - \lambda \int_{\mathrm{S}} \psi(\mathrm{P})\, \mathrm{K}(\mathrm{P},\mathrm{M})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = 0 \tag{3'}$$

ont chacune une solution, ou un même nombre fini de solutions linéairement indépendantes différentes de zéro (n° **21**, p. 70).

Nous supposerons que dans la suite (Σ) chaque constante caractéristique est répétée autant de fois qu'il lui correspond de solutions indépendantes. A la suite (Σ) correspondront donc deux suites de solutions associées de $(2')$, $(3')$

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots$$
$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots,\ \psi_n,\ \ldots.$$

On peut multiplier chacune de ces fonctions par une constante arbitraire sans qu'elles cessent d'être des solutions de $(2')$, $(3')$.

Si les constantes caractéristiques sont toutes différentes, ces fonctions sont biorthogonales (n° **28**, p. 85), c'est-à-dire qu'on a

$$(3) \qquad \int_{\mathrm{S}} \varphi_m(\mathrm{P})\, \psi_{m'}(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = 0, \quad \text{pour } m \neq m'.$$

On choisit la constante arbitraire de façon que

$$(4) \qquad \int_{\mathrm{S}} \varphi_m(\mathrm{P})\, \psi_m(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = 1.$$

Dans le cas où il y a plusieurs (soient q) paires de solutions indépendantes correspondant à une constante caractéristique λ_n, on a $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \ldots = \ldots = \lambda_{n+q-1}$, et les équations (3) n'ont plus lieu nécessairement. Mais on peut s'arranger de sorte que les équations précédentes soient toujours valables. Il suffit d'effectuer sur les q paires de solutions qui correspondent à λ_n une transformation linéaire dont les coefficients se détermineront par une méthode analogue à celle du n° **8**, p. 9.

Les solutions des équations non homogènes (1), (2) pour les valeurs ordinaires de λ sont déterminées par une fonction $\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P}, \lambda)$ appelée *résolvante* du *noyau* $\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$. Cette fonction est méromorphe en λ et a pour pôles les constantes caractéristiques (n° **10**, p. 57). Lorsque

λ n'est pas une constante caractéristique, les équations (1), (2) ont chacune une seule solution (n° **11**, p. 61), donnée par les formules

$$\varphi(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}) + \lambda \int_{\mathrm{S}} \mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P}, \lambda)\, f(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}$$
$$\psi(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}) + \lambda \int_{\mathrm{S}} \mathrm{K}(\mathrm{P}, \mathrm{M}, \lambda)\, f(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}.$$

Quand nous sommes dans le *cas singulier*, les équations (1) et (2) n'ont pas de solutions en général. Pour que l'équation (1), par exemple, ait une solution, il faut et il suffit qu'on ait (n° **26**, p. 80)

$$\int_{\mathrm{S}} f(\mathrm{P})\, \psi(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = 0, \tag{5}$$

pour chacune des solutions indépendantes ψ de $(3')$ qui correspondent à la même valeur de λ. Dans ce cas, la solution ne sera pas unique : elle renfermera q constantes arbitraires (n° **26**, p. 80).

Réciproquement, si l'équation homogène a une solution nous sommes dans le cas singulier.

2. — Dans le cas symétrique où $\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \mathrm{K}(\mathrm{P}, \mathrm{M})$, les deux équations associées coïncident. Leurs solutions φ_n, ψ_n coïncident donc aussi. Elles ne forment plus qu'une suite de *fonctions fondamentales* qui sont orthogonales (n° **30**, p. 90)

$$\int_{\mathrm{S}} \varphi_m(\mathrm{P})\, \varphi_{m'}(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = 0, \quad \text{pour } m \neq m'.$$

La solution de (1) s'exprime sous la forme

$$\varphi(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}) + \mathrm{A}_1\, \varphi_1(\mathrm{M}) + \mathrm{A}_2\, \varphi_2(\mathrm{M}) + \dots \tag{6}$$

où

$$\mathrm{A}_n = \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \int_{\mathrm{S}} f(\mathrm{P})\, \varphi_n(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}, \tag{7}$$

lorsque λ n'est pas une constante caractéristique (n° **42**, p. 108). Dans le cas singulier, il n'y a pas en général de solution. Il n'y en a

que si $f(\mathrm{M})$ est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales qui correspondent à la valeur de λ. L'expression de la solution devient un peu plus compliquée (nº **42**, p. 107).

Si la série (6) est infinie, elle est uniformément et absolument convergente. Une fonction quelconque $g(\mathrm{M})$ qui a la forme

$$g(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, p(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}, \tag{8}$$

où $p(\mathrm{M})$ est une fonction quelconque, se développe suivant une série absolument et uniformément convergente,

$$g(\mathrm{M}) = \mathrm{A}_1\, \varphi_1(\mathrm{M}) + \mathrm{A}_2\, \varphi_2(\mathrm{M}) + \dots \tag{9}$$

où

$$\mathrm{A}_n = \int_{\mathrm{S}} \varphi_n(\mathrm{P})\, g(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}}. \tag{10}$$

Quand le noyau $\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ est *fermé* (nº **41**, p. 107), la fonction $p(\mathrm{P})$ est unique pour chaque fonction g de carré intégrable.

Le nombre des constantes caractéristiques est, dans ce cas, infini et le système des fonctions fondamentales est *complet* (même nº).

II. — LA SOLUTION DES PROBLÈMES DE POTENTIEL

3. — Nous avons vu (nº **9**, p. 26) que les problèmes de Dirichlet et de Neumann se ramènent respectivement aux deux équations

$$2\pi\, \rho(\mathrm{M}) + \lambda \int_{\mathrm{S}} \rho(\mathrm{P})\, \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\mathrm{S} = f_1(\mathrm{M}), \tag{11}$$

$$2\pi\, \rho(\mathrm{M}) + \lambda \int_{\mathrm{S}} \rho(\mathrm{P})\, \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\mathrm{S} = f_1(\mathrm{M}), \tag{12}$$

où nous avons

pour $\lambda = +1$ cas intérieur Dirichlet, extérieur Neumann,
» $\lambda = -1$ » extérieur » , intérieur » .

Ce sont deux équations de Fredholm associées dont les noyaux sont respectivement

$$\mathrm{K(M,P)} = -\frac{\cos\varphi}{2\pi r^2}, \qquad \mathrm{K(P,M)} = -\frac{\cos\psi}{2\pi r^2}.$$

Le noyau K n'est pas continu partout. Mais s'il devient infini quand M et P coïncident, c'est dans les conditions examinées au n° **16**, p. 67 et aussi note A, p. 155. Pour ne pas introduire de complications, dans les démonstrations, nous supposerons, d'ailleurs que la surface S est analytique et qu'elle a en chaque point un plan tangent unique. En outre, nous supposerons que S est fermée et d'un seul tenant.

La solution du problème physique s'obtient en prenant le potentiel V d'une couche [double pour (11), simple pour (12)] étendue sur S et dont la densité ρ est solution de (11) ou (12).

4. — Il nous sera utile pour la suite d'écrire les formules de Green [1] pour le domaine D intérieur à S et le domaine D′ extérieur à S.

$$(13)\quad \iiint_{\mathrm{D}} \left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = -\int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_i \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i}\, d\mathrm{S} - \iiint_{\mathrm{D}} \mathrm{V}\,\Delta\mathrm{V}\, dx\,dy\,dz$$

$$(14)\quad \iiint_{\mathrm{D'}} \left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_e \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_e}\, d\mathrm{S} - \iiint_{\mathrm{D'}} \mathrm{V}\,\Delta\mathrm{V}\, dx\,dy\,dz.$$

Quand on prend pour V une fonction harmonique (en particulier, un potentiel de simple ou double couche), ΔV est nul dans D et

[1] Voir par exemple : APPELL, *Traité de Mécanique*, tome III, p. 7.

dans D′ de sorte qu'il ne reste plus dans chaque second membre que la première intégrale. On voit alors que si V_i ou $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est nul en chaque point de S, la première intégrale est aussi nulle et par suite, V est constant à l'intérieur de S. De même si V_e ou $\frac{\partial V}{\partial n_e}$ est nul en chaque point de S, V est constant à l'extérieur de S.

5. — Montrons maintenant que $\lambda = -1$ est une constante caractéristique de (11) et (12). Il suffit d'après le n° **1** de le prouver pour (11). Conformément au n° **21**, p. 71, nous montrerons dans ce but que l'équation homogène,

$$2\pi\,\rho(M) - \int_S \rho(P)\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS = 0 \tag{15}$$

a une solution différente de zéro.

Or si $d\alpha$ est l'angle solide déterminé par le point fixe M et l'élément de surface dS, nous aurons

$$d\alpha = \frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS.$$

Il faut donc satisfaire à l'équation

$$2\pi\,\rho(M) - \int_S \rho(P)\,d\alpha = 0. \tag{16}$$

Or on voit de suite qu'on a la solution non nulle

$$\rho(M) = \text{constante}. \tag{17}$$

Puisque $\lambda = -1$ est une constante caractéristique, l'équation

$$2\pi\,\rho(M) - \int_S \rho(P)\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,dS = 0 \tag{18}$$

aura aussi au moins une solution non nulle $\rho_1(M)$.

Interprétons ces deux solutions du point de vue physique. En appelant V le potentiel correspondant à la couche de densité ρ répandue sur S, on sait que :

1° S'il s'agit d'une double couche, le premier membre de (15) est égal à $-V_e$, comme on le voit en retranchant les équations (7), (8) (p. 15).

La proposition physique correspondant à l'existence de la solution (17) de (15) est la suivante : une double couche (magnétique) fermée dont le potentiel extérieur est nul a une densité constante. L'équation (7) du Chapitre Premier montre que le potentiel intérieur est constant et égal à $4\pi\rho$ [1].

2° Si au contraire V est un potentiel de simple couche, on voit en retranchant les équations (5), (6) (p. 15) que le premier membre de (18) est égal à $-\frac{\partial V}{\partial n_i}$. La solution $\rho_1(M)$ de (18) représente alors la densité d'une simple couche pour laquelle on a :

$$\frac{dV}{dn_i} = 0.$$

Le problème physique ainsi résolu est celui qui consiste à trouver le potentiel intérieur d'une couche électrique en équilibre sur une surface conductrice. On ne connaît ce potentiel, comme ρ_1, qu'à un facteur constant près qui sera déterminé par l'équation

$$\int_S \rho_1(M)\, dS = m$$

si on se donne la masse totale m de la charge. D'ailleurs ce potentiel est constant, d'après le n° **4**, à l'intérieur de S.

---

[1] Il n'est pas nécessaire dans cet alinéa (ni dans l'autre alinéa où nous renvoyons à la note actuelle) de préciser pour l'expression «potentiel intérieur (extérieur)» s'il s'agit du potentiel en un point quelconque intérieur (extérieur) à S ou de la limite de ce potentiel sur le bord intérieur (extérieur) de S. En effet : 1° Si V_i est constant, les valeurs de V à l'intérieur de S n'ayant ni maximum ni minimum seront aussi égales à cette constante ; 2° Si $V_e = 0$, on peut employer la formule de Green (14) et on en conclut comme au n° **4** que V est constante à l'extérieur de S. Comme $V_e = 0$, cette constante sera d'ailleurs nulle. Donc si $V_e = 0$, V est nul partout à l'extérieur.

L'existence des solutions de ces deux problèmes physiques étant établie, il y a lieu d'en connaître le nombre. Pour le second problème, on voit qu'au point de vue physique il ne doit y avoir qu'une seule solution indépendante. Car une charge électrique m (constante arbitraire) s'étale d'une seule manière sur une surface. On démontre ce fait analytiquement en prouvant que l'équation (18) n'a qu'une solution. Supposons qu'il y ait deux solutions linéairement indépendantes $\rho_1(\mathrm{M})$ et $\rho_2(\mathrm{M})$. L'expression $\rho'(\mathrm{M}) = \alpha\,\rho_1(\mathrm{M}) + \beta\,\rho_2(\mathrm{M})$ sera aussi une solution, et l'on peut choisir les constantes α et β de façon que

$$\int_{\mathrm{S}} \rho'(\mathrm{P})\, d\mathrm{S} = \alpha m_1 + \beta m_2 = 0. \tag{19}$$

Si V' est le potentiel de la simple couche de densité ρ', on voit comme plus haut que le résultat de la substitution de ρ' à ρ dans (18) peut s'écrire

$$\frac{d\mathrm{V}'}{dn_i} = 0. \tag{20}$$

Alors en appliquant à V' la formule de Green (13), on en conclut comme au nº **4**, que V' est constant, à l'intérieur de S. Le potentiel d'une simple couche étant partout continu, on a donc $\mathrm{V}'_e = \text{constante}$.

Or intégrons sur S la formule obtenue en remplaçant ρ, V, par ρ', V' dans l'identité (5) de la p. 15. On obtiendra en tenant compte de (19), (20)

$$\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial n_e}\, d\mathrm{S} = 0.$$

Appliquons maintenant la formule de Green (14) où l'on remplace V par V'. On aura encore dans le second membre $\Delta^2\mathrm{V}' = 0$ et puisque V'_e est constant, le premier terme du second membre deviendra

$$\int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}' \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial n_e}\, d\mathrm{S} = \mathrm{V}'_e \int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial n_e}\, d\mathrm{S} = 0.$$

On en conclut que le premier membre est nul et par suite que V′ est aussi constant à l'extérieur de S. De sorte qu'on a aussi

$$\frac{\partial V'}{\partial n_e} = 0 \tag{20bis}$$

et en utilisant la formule (5) de la p. 15, ainsi que (20) et (20bis), on voit que la densité $\rho'(M)$ est nulle identiquement, c'est-à-dire que

$$\alpha \, \rho_1(M) + \beta \, \rho_2(M) = 0$$

et les densités ρ_1 et ρ_2 ne peuvent être indépendantes.

L'équation (18) n'ayant qu'une solution, l'équation associée (15) n'en aura aussi qu'une seule à un facteur constant près.

Remarquons que les équations de Fredholm expriment tout aussi bien ces problèmes pour le cas de plusieurs surfaces distinctes extérieures les unes aux autres, en particulier le problème qui consiste à étaler sur plusieurs surfaces conductrices en présence les unes des autres, des charges indépendantes, et on peut démontrer que, comme il est évident au point de vue physique, le nombre de solutions indépendantes correspondantes à $\lambda = -1$ est égal au nombre de surfaces. Par contre, les résultats qui viennent d'être établis en 2° subsistent *sans modification* si D est le domaine compris entre une surface extérieure et une ou plusieurs surfaces intérieures à la première, le potentiel V étant encore visiblement constant dans les parties de l'espace intérieures à ces surfaces.

6. — La valeur $\lambda = +1$ n'est pas une constante caractéristique des équations (11), (12). Pour le prouver, nous montrerons comme plus haut que l'équation homogène (18) correspondant à (12), par exemple, n'a pas de solutions non nulles pour $\lambda = +1$. Cette valeur donnerait à l'équation homogène la forme

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} = 0, \tag{21}$$

qu'on obtient comme plus haut en appelant V le potentiel de la simple couche de densité ρ sur S et en combinant les équations (5), (6) de la p. 15.

On en conclut comme au n° **4**, au moyen de la formule de Green (14), que V est constante à l'extérieur de S, donc nulle, puisque V s'évanouit à l'infini. Mais un potentiel de simple couche est continu à travers la surface : donc $\mathrm{V}_i = 0$. Et par conséquent — en appliquant cette fois la formule de Green (13) — on a $\mathrm{V} = 0$ partout. Donc

$$\frac{d\mathrm{V}}{dn_e} = \frac{d\mathrm{V}}{dn_i} = 0 \qquad \text{et d'après (5), p. 15} \quad \rho(\mathrm{M}) = 0.$$

7. — Nous pouvons maintenant formuler les solutions de nos problèmes. Indiquons d'abord les résultats suivants qui se déduisent tout de suite des formules du n° **4** comme dans la note ([1]), p. 120.

Il ne peut y avoir qu'une seule fonction V harmonique à l'intérieur de S, qui prenne des valeurs données sur le bord, — ou harmonique à l'extérieur de S, qui prenne des valeurs données sur le bord et qui s'évanouisse à l'infini, — ou encore harmonique à l'extérieur de S, telle que $\dfrac{d\mathrm{V}}{dn}$ prenne des valeurs données sur le bord, et que V s'évanouisse à l'infini.

Une fonction V harmonique à l'intérieur de S, telle que $\dfrac{d\mathrm{V}}{dn}$ prenne des valeurs données, n'est pas unique, mais elle est définie à une constante arbitraire additive près. Elle n'existe que si la condition $\displaystyle\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i}\, d\mathrm{S} = 0$ est remplie, puisqu'on a pour toute fonction V

$$\iiint_{\mathrm{D}} \Delta \mathrm{V}\, dx\, dy\, dz + \int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i}\, d\mathrm{S} = 0. \tag{22}$$

Proposons-nous de trouver une fonction harmonique à l'intérieur ou l'extérieur de S et vérifiant l'une des quatre conditions :

$$1^{\circ}\ \mathrm{V}_i = 0, \quad 2^{\circ}\ \mathrm{V}_e = 0, \quad 3^{\circ}\ \frac{d\mathrm{V}}{dn_i} = 0, \quad 4^{\circ}\ \frac{d\mathrm{V}}{dn_e} = 0,$$

relatives aux problèmes intérieur et extérieur respectivement.

Pour les conditions 1° et 4° nous avons la solution évidente $V = 0$. C'est la seule d'après ce qui précède.

Pour 2°, l'équation intégrale correspondante (16) donne une solution à savoir le potentiel d'une double couche constante. Mais nous venons de voir que ce potentiel s'évanouit identiquement à l'extérieur de S.

Pour 3°, nous avons le potentiel d'une couche d'électricité en équilibre, c'est-à-dire une constante à l'intérieur de S comme nous l'avons observé.

Considérons maintenant les quatre conditions

$$1^\circ\ V_i =, \quad 2^\circ\ V_e =, \quad 3^\circ\ \frac{\partial V}{\partial n_i} =, \quad 4^\circ\ \frac{\partial V}{\partial n_e} = \text{fonction donnée} = f(P).$$

Les équations intégrales correspondantes sont (11) pour 1°, 2°, (12) pour 3°, 4° ; avec $\lambda = +1$ pour 1°, 4°, avec $\lambda = -1$ pour 2°, 3°, comme nous l'avons établi au n° **9**, p. 26. Puisque $\lambda = +1$ n'est pas une constante caractéristique, l'équation de Fredholm nous donne pour 1° et 4°, des solutions qui sont uniques (n° **1**, p. 116).

Elle ne donne des solutions de 2° et 3° que si la fonction donnée $f(M)$ satisfait à certaines conditions de la forme (5), n° **1**. Pour pouvoir les écrire, il faut former l'équation homogène associée correspondante et déterminer ses solutions. On a ici à prendre $\lambda = -1$. Or nous savons (n° **5**) que pour $\lambda = -1$, les équations homogènes correspondant à (11), (12) n'ont qu'un seul couple de solutions : $\rho =$ constante et $\rho = \rho_1(M)$, densité d'une couche d'électricité en équilibre, qu'on peut multiplier par un facteur constant de façon à donner à la couche une masse déterminée.

Donc pour que nous ayons une solution de 2°, il faut que

$$\int_S f(P)\,\varphi(P)\,dS = 0 \tag{23}$$

où $\rho = \varphi(M)$ représente la densité d'une couche d'électricité en équilibre de masse égale à l'unité, par exemple.

Pour que dans le cas 3° notre méthode nous fournisse une solution, il faut de même que

$$\int_S f(P)\, dS = 0. \tag{24}$$

Nous aurions pu écrire de suite cette dernière condition grâce à la formule (22) qui peut s'écrire sous la forme de Gauss

$$\int_S \frac{dV}{dn_i}\, dS = 4\pi \times \text{masse intérieure} = 0.$$

Ceci nous montre que la condition (24) est nécessaire pour que le problème 3° ait une solution. Au contraire quand la condition (23) n'est pas remplie, nous savons seulement que la méthode de Fredholm ne donne pas de solution dans le cas 2°. Cela ne veut pas dire qu'une solution n'existe pas. Tout ce que nous savons c'est que cette solution ne peut être représentée par un potentiel de double couche.

8. — Les solutions précédentes sont exprimables sous forme de séries d'intégrales comme nous l'avons démontré dans le Deuxième Chapitre [formules (47), (40), (41), (43)]. On a démontré qu'elles s'expriment aussi en séries de fonctions fondamentales, ainsi que les solutions des cas généraux (λ quelconque) des équations (11) et (12) [1].

Nous nous bornons à établir les résultats suivants :

1° Les constantes caractéristiques des équations associées (11), (12) sont réelles ;

2° Elles sont des pôles simples de la résolvante [2] ;

3° La première est $\lambda = -1$; les autres ont des modules plus grands que l'unité.

9. — Supposons qu'il y ait un pôle complexe $\lambda_0 = \alpha + i\beta$. Alors l'équation homogène correspondante à (12) a pour cette valeur de λ une

---

[1] Poincaré, *Acta Mathematica*, t. XX, 1897 ; Plemelj, Stekloff, voir la bibliographie, p. 175.

[2] On remarquera que ces deux propriétés ont lieu bien que le noyau ne soit pas symétrique (comparer avec les n^{os} **31**, p. 90 et **34**, p. 95).

solution non nulle ρ. Il y a un potentiel de simple couche correspondant $V = V_1 + iV_2$ qui, d'après le n° **9**, p. 27, satisfait à l'équation

$$\left[\frac{dV}{dn_e} - \frac{dV}{dn_i}\right] + \lambda_0 \left[\frac{dV}{dn_e} + \frac{dV}{dn_i}\right] = 0. \tag{25}$$

Car cette équation correspond à l'équation (12), lorsque nous y faisons

$$g_1(M) = 0, \qquad \lambda = \lambda_0.$$

Séparons les parties réelles et imaginaires.

Nous avons

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dV_1}{dn_e} - \frac{dV_1}{dn_i} &= -\alpha\left[\frac{dV_1}{dn_e} + \frac{dV_1}{dn_i}\right] + \beta\left[\frac{dV_2}{dn_e} + \frac{dV_2}{dn_i}\right], \\ \frac{dV_2}{dn_e} - \frac{dV_2}{dn_i} &= -\beta\left[\frac{dV_1}{dn_e} + \frac{dV_1}{dn_i}\right] - \alpha\left[\frac{dV_2}{dn_e} + \frac{dV_2}{dn_i}\right]. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Utilisons maintenant les formules de Green

$$\int_S \left(V_1 \frac{\partial V_2}{\partial n_i} - V_2 \frac{\partial V_1}{\partial n_i}\right) dS + \iiint_D (V_1\,\Delta V_2 - V_2\,\Delta V_1)\, dx\, dy\, dz = 0 \tag{27}$$

$$\int_S \left(V_1 \frac{\partial V_2}{\partial n_e} - V_2 \frac{\partial V_1}{\partial n_e}\right) dS - \iiint_D (V_1\,\Delta V_2 - V_2\,\Delta V_1)\, dx\, dy\, dz = 0 \tag{28}$$

en remarquant qu'ici les deux intégrales triples sont nulles puisque V_1 et V_2 sont harmoniques.

Si nous multiplions les équations (26) par V_2 et V_1 respectivement, si nous retranchons la seconde de la première, et si nous intégrons le résultat sur la surface S, nous aurons à cause de la formule de Green l'équation

$$\beta\left[\int_S V_2 \frac{dV_2}{dn_i}\, dS + \int_S V_2 \frac{dV_2}{dn_e}\, dS + \int_S V_1 \frac{dV_1}{dn_i}\, dS + \int_S V_1 \frac{dV_1}{dn_e}\, dS\right] = 0.$$

De même en multipliant par V_1 et V_2, et en ajoutant après avoir intégré sur S, nous avons

$$\begin{aligned} (1+\alpha)&\left[\int_S V_1 \frac{dV_1}{dn_e}\, dS + \int_S V_2 \frac{dV_2}{dn_e}\, dS\right] \\ =(1-\alpha)&\left[\int_S V_1 \frac{dV_1}{dn_i}\, dS + \int_S V_2 \frac{dV_2}{dn_i}\, dS\right]. \end{aligned}$$

Donc pourvu que nous n'ayons pas $\beta = 0$, puisque

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \neq -1,$$

il faut que

$$\int_S V_1 \frac{dV_1}{dn_e}\, dS + \int_S V_2 \frac{dV_2}{dn_e}\, dS = 0, \tag{29}$$

$$\int_S V_1 \frac{dV_1}{dn_i}\, dS + \int_S V_2 \frac{dV_2}{dn_i}\, dS = 0. \tag{30}$$

Or chacune des deux intégrales de (29), est supérieure ou au moins égale à zéro, comme nous voyons en faisant $\Delta V = 0$ dans la formule de Green (14). Il faut donc que chacune s'évanouisse. On raisonnerait de même avec l'équation (30). D'où il résulte, en se servant encore des mêmes formules de Green, que V est constante dans tout l'espace. Et ce résultat exigerait que $\rho = 0$ d'après l'équation (5) (Chap. I).

Donc $\beta = 0$, et il ne peut y avoir une constante caractéristique complexe.

10. — Supposons maintenant que λ_1 soit un pôle de degré m de la résolvante. La valeur λ_1 sera (nº **1**) un pôle de degré m de la solution ρ de (12) (sauf pour des formes particulières de $f_1(M)$; mais cette fonction est arbitraire). Nous aurons donc si $m > 1$

$$\rho(M) = \frac{\rho_1(M)}{(\lambda-\lambda_1)^m} + \frac{\rho_2(M)}{(\lambda-\lambda_1)^{m-1}} + \frac{R(M)}{(\lambda-\lambda_1)^{m-2}}$$

où $\rho_1(M)$, $\rho_2(M)$ sont indépendantes de λ, et $R(M)$ n'a pas un pôle pour $\lambda = \lambda_1$.

Substituons cette expression dans l'équation (12) mise sous la forme

$$2\pi\,\rho(M) + (\lambda-\lambda_1)\int_S \rho(P)\frac{\cos\psi}{r^2}\, dS + \lambda_1 \int_S \rho(P)\frac{\cos\psi}{r^2}\, dS = f_1(M) \tag{31}$$

et égalons à zéro les coefficients de $(\lambda-\lambda_1)^{-m}$, et $(\lambda-\lambda_1)^{-m+1}$.

Nous obtiendrons

$$2\pi\,\rho_1(\mathrm{M}) + \lambda_1 \int_{\mathrm{S}} \rho_1(\mathrm{P})\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\mathrm{S} = 0,$$
$$2\pi\,\rho_2(\mathrm{M}) + \lambda_1 \int_{\mathrm{S}} \rho_2(\mathrm{P})\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\mathrm{S} = -\int_{\mathrm{S}} \rho_1(\mathrm{P})\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\mathrm{S}.$$

Considérons les simples couches $\rho_1(\mathrm{M})$, $\rho_2(\mathrm{M})$. Les potentiels V_1 et V_2 de ces couches satisferont aux équations

$$\frac{d\mathrm{V}_1}{dn_e} - \frac{d\mathrm{V}_1}{dn_i} + \lambda_1\left[\frac{d\mathrm{V}_1}{dn_e} + \frac{d\mathrm{V}_1}{dn_i}\right] = 0, \tag{32}$$
$$\frac{d\mathrm{V}_2}{dn_e} - \frac{d\mathrm{V}_2}{dn_i} + \lambda_1\left[\frac{d\mathrm{V}_2}{dn_e} + \frac{d\mathrm{V}_2}{dn_i}\right] = -\left[\frac{d\mathrm{V}_1}{dn_e} + \frac{d\mathrm{V}_1}{dn_i}\right]. \tag{33}$$

Multiplions (32) par V_2 et (33) par V_1, retranchons les deux équations et intégrons le résultat. On aura d'après (27), (28)

$$\int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_1\,\frac{d\mathrm{V}_1}{dn_e}\,d\mathrm{S} + \int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_1\,\frac{d\mathrm{V}_1}{dn_i}\,d\mathrm{S} = 0.$$

Multiplions ensuite (32) par V_1 et intégrons

$$(1+\lambda_1)\int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_1\,\frac{d\mathrm{V}_1}{dn_e}\,d\mathrm{S} + (\lambda_1 - 1)\int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_1\,\frac{d\mathrm{V}_1}{dn_i}\,d\mathrm{S} = 0.$$

Ces deux dernières équations sont distinctes : il s'ensuit donc

$$\int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_1\,\frac{d\mathrm{V}_1}{dn_e}\,d\mathrm{S} = 0, \qquad \int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_1\,\frac{d\mathrm{V}_1}{dn_i}\,d\mathrm{S} = 0,$$

ce qui conduit à $\rho_1(\mathrm{M}) = 0$ comme dans le dernier numéro.

Il en résulte qu'on ne peut pas avoir un pôle dont le degré est plus grand que l'unité. On voit facilement que ce qui précède ne s'applique pas au cas où $m = 1$.

11. — Démontrons maintenant que les modules des constantes caractéristiques autres que $\lambda = -1$ sont plus grands que l'unité. On

le voit immédiatement en multipliant l'équation (25) par V et en l'intégrant sur la surface. Il vient

$$(34)\qquad \lambda_0 = \frac{\left[\int_S V \frac{dV}{dn_i} dS - \int_S V \frac{dV}{dn_e} dS\right]}{\left[\int_S V \frac{dV}{dn_i} dS + \int_S V \frac{dV}{dn_e} dS\right]}.$$

Rappelons que d'après (13), (14)

$$\int_S V \frac{dV}{dn_i} dS \leqslant 0, \qquad \int_S V \frac{dV}{dn_e} dS \geqslant 0,$$

nous voyons bien d'après (34), que

$$|\lambda_0| \geq 1.$$

12. — M. Fredholm a montré qu'on peut appliquer sa méthode au cas d'une ou de plusieurs surfaces distinctes [1].

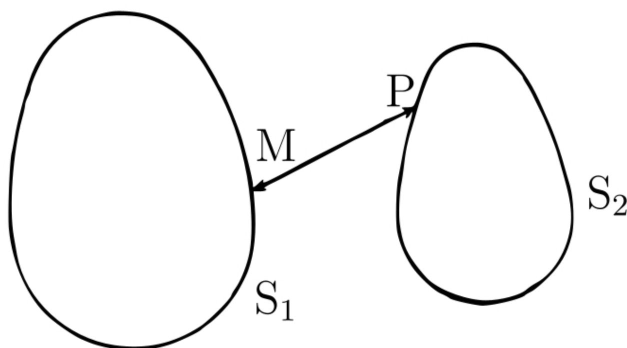


Fig. 3.

Prenons comme exemple le cas de deux surfaces S_1, S_2. (fig. 3). Étant donnée une série de valeurs sur ces deux surfaces, il s'agit de déterminer une fonction harmonique à l'extérieur de S_1 et de S_2,

[1] M. Picard a étudié ce problème dans son cours de 1906. Voir H. B. Heywood. Thèse, *loc. cit.*, p. 63–69.

dont la dérivée normale prend sur ces surfaces les valeurs données. On considère que les points M et P prennent toutes les positions sur S_1 et S_2. La suite des valeurs données sera simplement une fonction de M. Le problème est exprimé par l'équation (12), où r est la distance entre les deux points M et P qui peuvent être soit tous deux à la fois sur l'une des surfaces S_1 et S_2, soit l'un sur S_1, l'autre sur S_2. Toutefois il y a lieu de compléter la théorie générale du «déterminant» $D(\lambda)$ dans le cas des surfaces multiconnexes.

13. Problème de la chaleur. — Considérons maintenant le problème 3° du n° **4**, p. 17, qui consiste à trouver une fonction harmonique satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial V}{\partial n} + p(M)\,V = h(M) \quad \text{sur la surface.}$$

Il est exprimé par l'équation

$$2\pi\,\rho(M) - \lambda \int_S \rho(P)\left[\frac{\cos\psi}{r^2} + \frac{p(M)}{r^2}\right] dS = h_1(M) \tag{35}$$

(voir le n° **9**, Chap. I) où nous avons les cas intérieur et extérieur pour $\lambda = +1$ et -1 respectivement.

Pour le cas intérieur, l'équation de Green (13) nous donne

$$\iiint_D \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = -\int_S V\frac{\partial V}{\partial n_i}\,dS = \int_S p(M)\,V^2\,dS$$

où V est un potentiel correspondant à l'équation intégrale (25) rendue homogène.

Donc si p est toujours négatif, cette équation homogène n'a pas de solution non nulle : nous ne sommes pas dans le cas singulier, il y a une solution unique de l'équation avec second membre (35). C'est ce qui a lieu pour le problème d'un corps en équilibre de température avec rayonnement, où p est une constante négative (voir 5°, n° **6**, Chap. I). Si p est positif ou change de signe, nous ne pouvons rien dire, et il faut examiner chaque cas séparément.

Pour le cas extérieur, nous pouvons dire que nous ne sommes pas dans le cas singulier (autrement dit qu'il y a une solution unique), si p est essentiellement positif.

14. Fonctions de Green. — Les paragraphes précédents vont nous permettre de construire des fonctions de Green $\mathfrak{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})$ (n° **8**, p. 21) pour les conditions suivantes :

1° $\mathfrak{G} = 0$ sur la surface, *intérieur et extérieur*;

2° $\dfrac{\partial\mathfrak{G}}{\partial n} = 0$ sur la surface, *extérieur seulement*;

3° $\dfrac{\partial\mathfrak{G}}{\partial n} + p(\mathrm{M}) \cdot \mathfrak{G} = 0$

intérieur si $p(\mathrm{M})$ est essentiellement négatif;

extérieur » » » positif.

Pour les autres cas de 3° (p quelconque) nous ne pourrons rien dire [1] sauf qu'il y aura *en général* une fonction de Green.

En effet, en posant $\mathfrak{G}(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \dfrac{1}{r} - \varpi$, tout revient à trouver une fonction ϖ harmonique dans un domaine D ou D′ limité par S, et satisfaisant à l'une des conditions

$$\varpi_i =, \qquad \varpi_e =, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial n_e} =, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial n} + p(\mathrm{M})\varpi = \text{fonction donnée};$$

problèmes qui ont été traités au n° **7**, p. 14.

Si ϖ_i ou $\dfrac{\partial\varpi}{\partial n_e}$ sont données, nous savons que la solution existe et est unique. Si ϖ_e est donnée, on obtient par inversion [2], en ramenant

[1] On n'a pas encore approfondi cette question.

[2] Il suffit pour cela d'utiliser la remarque de Lord Kelvin suivant laquelle si $\mathrm{V}(x, y, z)$ est une fonction harmonique il en est de même de la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \mathrm{V}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{y}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

au cas intérieur, une solution ϖ qui ne s'annule pas à l'infini. Enfin si $\frac{\partial\varpi}{\partial n} + p(\mathrm{M})\varpi$ est donné, nous savons que la solution existe et est unique pour les deux cas mentionnés plus haut au 3°. Si p est d'un signe quelconque, nous savons seulement que l'équation (35), n'est singulière que pour des valeurs particulières de λ qui en général sont différentes de ± 1. De sorte qu'en général, le problème a une solution unique.

En ce qui concerne la condition 2° pour le cas intérieur, si nous écrivions

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{r} - \varpi \tag{36}$$

il faudrait que nous eussions une fonction harmonique ϖ, qui satisfasse à la condition

$$\frac{\partial\varpi}{\partial n_i} = \frac{\partial}{\partial n_i}\frac{1}{r} \quad \text{sur la surface.}$$

Or c'est impossible puisque, contrairement à la condition (24) du n° **7**, l'expression

$$\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{1}{r}\right) d\mathrm{S} = 4\pi \quad \text{n'est pas nulle.}$$

Cependant si nous remplaçons la condition 2°par la condition

$$4^{\circ} \quad \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial n_i} = \frac{4\pi}{\mathrm{S}} \tag{37}$$

où S désigne l'aire de la surface, nous aurons à trouver une fonction ϖ harmonique à l'intérieur de S, et satisfaisant à

$$\frac{\partial\varpi}{\partial n_i} = \frac{\partial}{\partial n_i}\frac{1}{r} - \frac{4\pi}{\mathrm{S}} \quad \text{sur la surface,}$$

ce qui est possible, puisque

$$\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial\varpi}{\partial n_i} d\mathrm{S} = \int_{\mathrm{S}} \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{1}{r}\right) d\mathrm{S} - \int_{\mathrm{S}} \frac{4\pi}{\mathrm{S}} d\mathrm{S} = 4\pi - 4\pi = 0.$$

15. Les problèmes généralisés. — Il s'agit ici de chercher (n° **5**, p. 18) des solutions de

$$\Delta \mathrm{V} = \varphi(x, y, z) \tag{38}$$

qui satisfont à diverses conditions sur la frontière S d'un domaine D.

Nous avons déjà traité au même n° **5** le cas intérieur pour la condition

$$\mathrm{V} = f(\mathrm{M}) \quad \text{sur la surface S.}$$

Le problème étant ramené au problème de Dirichlet, a une solution unique.

Pour le cas extérieur, en ramenant par une inversion au cas précédent, nous aurons également une solution, mais elle ne s'évanouit pas à l'infini.

Cherchons ensuite la solution intérieure pour la condition

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i} = f(\mathrm{M}). \tag{39}$$

Nous utiliserons la fonction de Green $\mathfrak{G}$, telle que

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n_i} = \frac{4\pi}{\mathrm{S}} \quad (\text{n° } \mathbf{14},\ 4°). \tag{40}$$

Ecrivons

$$\mathrm{V}_1 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{D}} \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \varphi(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}}.$$

On a, d'après (13), p. 23

$$\Delta \mathrm{V}_1 = \varphi(x, y, z)$$

et sur la surface

$$\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n_i} = -\frac{1}{\mathrm{S}}\int_{\mathrm{D}} \varphi(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} = -\frac{1}{\mathrm{S}}\,\varphi_0$$

où

$$\varphi_0 = \int_{\mathrm{D}} \varphi(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}}.$$

Ecrivons ensuite

$$V = V_1 + V_2.$$

Nous aurons

$$\Delta V_2 = 0,$$

et sur la surface

$$\frac{\partial V_2}{\partial n_i} = f(M) + \frac{1}{S}\varphi_0.$$

Nous aurons donc [d'après la condition (24) du n° **7**] une solution de notre problème pourvu que

$$\int_S f(M)\, dS + \varphi_0 = 0$$

ou

$$\int_S f(M)\, dS + \int_D \varphi(P)\, d\omega_P = 0, \tag{41}$$

condition que fournirait directement la formule (22), p. 124.

Le cas extérieur ne présente pas de difficulté, puisque la fonction de Green correspondante existe (n° **14**, 2°).

Nous arrivons à la condition mixte

$$\frac{\partial V}{\partial n} + p(M)V = f(M) \quad \text{sur la surface.} \tag{42}$$

Pour ce problème, il y aura une solution pour le cas intérieur si $p(M)$ est essentiellement négatif, et pour le cas extérieur si $p(M)$ est essentiellement positif. En effet, dans ces deux cas, nous pouvons opérer comme précédemment, $\mathfrak{G}$ étant soumis non à la condition (39), mais à 3° du n° **14** et V_2 étant une fonction harmonique vérifiant (42). Les fonctions $\mathfrak{G}$, V_2 existent et sont uniques d'après les n^{os} respectifs **14** et **13**. Nous pouvons dire aussi que si $p(M)$ n'a pas un signe constant, il y aura en général une solution, et nous pouvons prédire que pour certains cas isolés, il n'y aura de solution que si $f(M)$ satisfait à une certaine condition.

III. — PROBLÈMES RELATIFS À L'ÉQUATION $\Delta V = R(x, y, z)V$, ET À DES ÉQUATIONS ANALOGUES

16. — Nous avons posé ces problèmes au n° **11**, p. 28 du Chap. I. Pour commencer, envisageons l'équation

$$\Delta V = R(x, y, z)V \tag{43}$$

Soit d'abord à trouver une solution analytique de (43) *à l'intérieur* de S, satisfaisant à la condition

$$V = 0 \quad \text{sur la surface.} \tag{44}$$

Nous avons vu (n° **13**, Chap. I, p. 30) que cette question revient à la solution de l'équation intégrale homogène

$$V(M) = -\frac{\lambda}{4\pi}\int_D \mathfrak{G}(M, P)\, R(P)\, V(P)\, d\omega_P \tag{45}$$

pour la valeur $\lambda = 1$ [1].

Il n'y aura de solution non nulle à notre problème que si $\lambda = 1$ est une des constantes caractéristiques, autrement dit il n'y aura de solution que pour certaines formes particulières de la fonction $R(x, y, z)$. Nous allons démontrer qu'il n'y a pas de solution si $R(x, y, z)$ est toujours positif dans D [2].

Remplaçons V dans la formule de Green (13) par la solution cherchée de (43). Il vient

$$\iiint_D \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = -\iiint_D R(x, y, z)\, V^2\, dx\, dy\, dz \tag{46}$$

---

(1) Le noyau $\mathfrak{G}(M, P)\, R(P)$ devient infini quand M, P coïncident, mais seulement comme $\mathfrak{G}$ et par conséquent comme $\frac{1}{r}$; nous sommes donc dans les conditions étudiées au n° **16**, p. 67, et note A, p. 155.

(2) Dans ce cas le noyau sera de la forme étudiée au n° **45**, p. 114, puisque $\mathfrak{G}(M, P)$ est symétrique.

d'où il est évident qu'une solution non nulle V n'existe pas lorsque la fonction $\mathrm{R}(x, y, z)$ reste positive.

Remplaçons maintenant la condition (44) par

$$\text{(47)} \qquad \mathrm{V} = \text{fonction donnée} = f(\mathrm{M}) \text{ sur S}.$$

Nous avons vu (Chap. I, n° **13**) qu'il faut :

1° Trouver une fonction harmonique $v(\mathrm{M})$ qui satisfait à la condition (47).

2° Trouver une solution, V_1 de l'équation non-homogène

$$\text{(48)} \qquad \mathrm{V(M)} = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathrm{D}} \mathcal{G}(\mathrm{M, P})\, \mathrm{R(P)}\, \mathrm{V(P)}\, d\omega_{\mathrm{P}} + v(\mathrm{M})$$

(voir n° **13**) où $d\omega_{\mathrm{P}}$ est un élément de volume. Cette fonction V_1 sera alors la solution désirée.

Donc il y aura une solution unique pourvu que la solution pour la condition (44) n'existe pas.

En particulier, nous aurons certainement une solution unique si $\mathrm{R}(x, y, z)$ est essentiellement positif.

Considérons maintenant le *cas extérieur* pour la condition (44). Il est évident que cette solution est donnée de la même façon par l'équation (45) pour un domaine extérieur D'. D'après la formule de Green correspondante (14), on voit comme plus haut qu'elle n'existe pas pour R constamment positif.

Pour la condition (47), il y a une nouvelle difficulté. Si nous cherchons à résoudre le problème par l'équation (48), il faut avoir une fonction $v(\mathrm{M})$, harmonique à l'extérieur de la surface S et qui satisfait à la condition (47) ; ce n'est possible avec une fonction v nulle à l'infini que si (n° **7**, p. 125, cas 2°)

$$\text{(49)} \qquad \int_{\mathrm{S}} \varphi(\mathrm{M})\, f(\mathrm{M})\, d\mathrm{S} = 0.$$

Posons

$$\text{(50)} \qquad \mathrm{F} = \int_{\mathrm{S}} \varphi(\mathrm{M})\, f(\mathrm{M})\, d\mathrm{S}.$$

En général, la quantité F est différente de zéro.

Cherchons alors une fonction v, harmonique à l'extérieur de S et qui satisfait à la condition

$$v(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}) - \mathrm{F}$$

sur S, ce qui est toujours possible (remarquer que $\int_{\mathrm{S}} \varphi(\mathrm{M})\, d\mathrm{S} = 1$, p. 125).

La solution sera donnée par l'équation

$$\text{(51)} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{M}) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathrm{D}} \mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \mathrm{V}(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} + v(\mathrm{M}) + \mathrm{F}.$$

17. — Envisageons maintenant la condition de Neumann

$$\text{(52)} \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} = g(\mathrm{M})$$

sur S, en commençant par le cas particulier

$$(52^{\text{bis}}) \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} = 0$$

sur S, où l'on cherche une fonction *extérieure*.

La fonction de Green relative à cette même condition (52bis) existe d'après le n° **14** (cas 2°, extérieur). Dès lors la solution vérifie l'équation intégrale homogène (45), où $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ est la fonction de Green propre à ce cas et où l'on prend $\lambda = 1$. La solution n'existe donc que si $\lambda = 1$ est une constante caractéristique.

La formule de Green nous montre encore ici que cette fonction n'existe pas si R est constamment positif.

La solution extérieure pour la condition (52) vérifiera l'équation intégrale (48), où $v(\mathrm{M})$ est maintenant une fonction harmonique satisfaisant à (52) et obtenue sans difficulté (voir n° **7**, cas 4°).

C'est pour le cas intérieur qu'il y a des difficultés. Commençons par la condition (52bis).

On peut former (voir n° **14**, 4°) une fonction de Green $\mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ telle que

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n_i} = \frac{4\pi}{\mathrm{S}} \tag{53}$$

sur la surface.

Nous pouvons ajouter à $\mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ une fonction de P, C(P) telle que

$$\int_{\mathrm{D}} \left[\mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) + \mathrm{C}(\mathrm{P})\right] \mathrm{R}(\mathrm{M})\, d\omega_{\mathrm{M}} = 0.$$

Cela revient à supposer que

$$\int_{\mathrm{D}} \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \mathrm{R}(\mathrm{M})\, d\omega_{\mathrm{M}} = 0, \tag{54}$$

$\mathfrak{G}$ ayant les propriétés d'une fonction de Green, sauf d'être symétrique.

Considérons maintenant l'équation

$$\mathrm{V}(\mathrm{M}) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int_{\mathrm{D}} \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \mathrm{V}(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}}. \tag{55}$$

Nous avons

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i} = -\frac{\lambda}{4\pi} \int_{\mathrm{D}} \frac{4\pi}{\mathrm{S}} \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \mathrm{V}(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} = -\frac{\lambda}{\mathrm{S}} \int_{\mathrm{D}} \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \mathrm{V}(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}}, \tag{56}$$

et d'après la formule (13), p. 23

$$\Delta \mathrm{V} = \lambda \mathrm{R}(\mathrm{M})\, \mathrm{V}(\mathrm{M}).$$

Or multiplions l'équation (55) par $\mathrm{R}(\mathrm{M})\, d\omega_{\mathrm{M}}$ et effectuons l'intégration dans le domaine extérieur D′. Nous avons

$$\int_{\mathrm{D}} \mathrm{R}(\mathrm{M})\, \mathrm{V}(\mathrm{M})\, d\omega_{\mathrm{M}} = -\frac{\lambda}{4\pi} \int_{\mathrm{D}} \left[\int_{\mathrm{D}} \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \mathrm{R}(\mathrm{M})\, d\omega_{\mathrm{M}}\right] \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \mathrm{V}(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i} = 0,$$

et l'équation (55) nous donne bien la solution de notre problème pour $\lambda = 1$. Cette solution n'existe que si $\lambda = 1$ est une constante caractéristique du noyau

$$\frac{1}{4\pi} \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \mathrm{R}(\mathrm{P}).$$

Passons maintenant à la solution pour la condition (52) (intérieure). Posons

$$\int_{\mathrm{S}} g(\mathrm{M})\, d\mathrm{S} = \mathrm{G}.$$

Construisons maintenant la fonction

$$v_2 = \frac{\mathrm{G}}{4\pi \mathrm{D}} \int_{\mathrm{D}} \frac{1}{r}\, d\omega_{\mathrm{P}},$$

D étant le volume de la surface.

Nous avons d'après la formule de Gauss (nº **7**, p. 125)

$$\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial v_2}{\partial n_i}\, d\mathrm{S} = \mathrm{G}.$$

Déterminons enfin une fonction v_1, harmonique à l'intérieur de S et telle que

$$\frac{\partial v_1}{\partial n_i} = g(\mathrm{M}) - \frac{\partial v_2}{\partial n_i}$$

ce qui est possible (nº **7**, cas 3º), puisque

$$\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial v_1}{\partial n_i}\, d\mathrm{S} = \mathrm{G} - \mathrm{G} = 0.$$

La solution de notre problème sera alors la solution de l'équation

$$\text{(57)} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{M}) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int_{\mathrm{D}} \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \mathrm{V}(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} + v_1(\mathrm{M}) + v_2(\mathrm{M})$$

pour $\lambda = 1$, $\mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ désignant la fonction de Green utilisée dans (55).

La solution existera lorsque la solution pour $g(\mathrm{M}) = 0$ n'existe pas. On voit comme plus haut qu'il suffit que R soit essentiellement positif dans D.

18. — Nous aborderons enfin le problème de la chaleur où la condition sur la surface S est la suivante

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + p(\mathrm{M})\mathrm{V} = h(\mathrm{M}).$$

Nous avons vu au n° **14** que nous pouvons *en général* construire une fonction de Green $\mathfrak{G}_1$ satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n} + p(\mathrm{M})\,\mathfrak{G} = 0$$

sur la surface.

Cette fonction nous permet de résoudre de suite le cas où

$$h(\mathrm{M}) = 0.$$

Nous avons en effet l'équation homogène de Fredholm (45), où $\mathfrak{G}$ est remplacé par $\mathfrak{G}_1$ et il y aura une solution dans le cas où $\lambda = 1$ est une constante caractéristique.

Et de même nous avons une équation analogue à (48) pour traiter le cas où $h(\mathrm{M}) \neq 0$.

19. — Nous avons déjà indiqué (voir n° **14**, p. 31) comment on traite les équations

(58) $$\Delta \mathrm{V} = \mathrm{R}(x, y, z)\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}$$

(59) $$\Delta \mathrm{V} = \mathrm{R}(x, y, z)\,\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial t^2}.$$

Il s'agit de trouver une fonction V qui vérifie une de ces équations à l'intérieur d'une surface régulière S, qui se réduit à une fonction

donnée $\alpha(x, y, z)$ pour $t = 0$, et qui satisfait à certaines conditions sur la surface, conditions de Dirichlet, de Neumann, de la chaleur.

Nous commençons avec (58) par le problème *intérieur* avec la condition

$$\text{(60)} \qquad \mathrm{V} = 0$$

sur la surface.

Substituons dans (58)

$$\text{(61)} \qquad \mathrm{V} = e^{-\lambda t}\,\varphi(x, y, z)\ \left[= e^{-\lambda t}\,\varphi(\mathrm{M})\right].$$

Il vient

$$\text{(62)} \qquad \Delta\varphi = -\lambda \mathrm{R}(\mathrm{M})\,\varphi.$$

Nous avons déjà vu que la solution de cette équation avec la condition (60) revient à l'équation homogène (voir n° **16**),

$$\text{(63)} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_{\mathrm{D}} \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\,\mathrm{R}(\mathrm{P})\,\varphi(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}},$$

où $\mathfrak{G}$ est la fonction de Green nulle sur S.

Donc il y aura des déterminations de φ pour certaines valeurs de λ seulement : les constantes caractéristiques du noyau

$$\frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\,\mathrm{R}(\mathrm{P}).$$

Ce noyau a la forme d'une fonction symétrique $\mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ multipliée par une fonction R de P seul. Si R est essentiellement positif, ce qui est vrai pour les applications physiques, ce noyau entre dans la catégorie considérée par M. E. Schmidt (voir Ch. II, n° **45**, p. 114). Il se ramène à un noyau symétrique : ses constantes caractéristiques sont réelles et ce sont des pôles simples de la résolvante [1].

---

[1] Pour le cas où R est quelconque, voir T. Marty, *Comptes Rendus*, fév. 1910.

Or au moyen de la formule (13) obtenue au n° **8**, p. 23, on peut écrire

$$\Delta \int_{\mathrm{D}} \mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, f(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} = -4\pi\, f(\mathrm{M}); \tag{64}$$

nous allons montrer qu'à toute fonction $g(\mathrm{M})$ continue ainsi que ses dérivées premières et secondes et nulle sur S, on peut faire correspondre une fonction $f(\mathrm{M})$, telle que

$$\int_{\mathrm{D}} \mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, f(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} = g(\mathrm{M}). \tag{65}$$

En comparant (65) avec (64) on voit en effet que si la fonction $f(\mathrm{M})$ existe, elle vérifie

$$\Delta g(\mathrm{M}) = -4\pi\, f(\mathrm{M}).$$

Il faut montrer que si l'on substitue cette expression de $f(\mathrm{M})$ dans le premier membre de (65), la fonction obtenue

$$q(\mathrm{M}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathrm{D}} \mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \Delta_{\mathrm{P}} g(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}}$$

n'est autre que $g(\mathrm{M})$.

Or on a d'après la formule générale (64)

$$\Delta q(\mathrm{M}) = \Delta g(\mathrm{M}) \quad \text{ou} \quad \Delta\big[q(\mathrm{M}) - g(\mathrm{M})\big] = 0.$$

Donc la fonction $q(\mathrm{M}) - g(\mathrm{M})$ est une fonction harmonique à l'intérieur de S, qui s'annule sur S (n° **8**, p. 24), et qui est bien, par conséquent (n° **7**, p. 124), identiquement nulle.

Il en résulte que toute fonction $g(\mathrm{M})$ nulle sur S et continue avec ses dérivées secondes est de la forme exigée par la condition (8) du n° **2**, p. 118. Elle peut donc être développée en une série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales

$$\varphi_1(\mathrm{M}),\ \varphi_2(\mathrm{M}),\ \ldots,\ \varphi_n(\mathrm{M}),\ \ldots$$

relatives au noyau $\mathcal{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,.\,\mathrm{R}(\mathrm{P})$. D'ailleurs ceci exige manifestement que le nombre de ces fonctions fondamentales soit infini.

Rappelons-nous maintenant qu'outre la condition aux limites, on assujettit la solution V de (58) à une condition initiale, laquelle consiste à se donner l'expression $\alpha(x, y, z)$ de V pour $t = 0$. La fonction α est continue avec ses dérivées secondes et d'après la condition (60) écrite pour $t = 0$, elle s'annule sur S. Elle satisfait donc aux conditions exigées pour le développement en série de $g(\mathrm{M})$.

Développons de cette manière la fonction initiale $\alpha(x, y, z)$

$$\alpha(\mathrm{M}) = \mathrm{A}_1\,\varphi_1(\mathrm{M}) + \mathrm{A}_2\,\varphi_2(\mathrm{M}) + \ldots + \mathrm{A}_n\,\varphi_n(\mathrm{M}) + \ldots \tag{66}$$

où les A sont donnés par la méthode de Fourier (n° **9**, p. 11).

Une solution de notre problème sera alors

$$\mathrm{V}(\mathrm{M}, t) = \mathrm{A}_1\,\varphi_1(\mathrm{M})\,e^{-\lambda_1 t} + \mathrm{A}_2\,\varphi_2(\mathrm{M})\,e^{-\lambda_2 t} + \ldots + \mathrm{A}_n\,\varphi_n(\mathrm{M})\,e^{-\lambda_n t} + \ldots \tag{67}$$

série qui est convergente puisque (66) l'est absolument.

Cette solution satisfait à toutes les conditions prescrites.

1° Elle satisfait à l'équation (58), puisque chaque terme satisfait à cette équation.

2° Elle a pour limite zéro sur la surface.

3° Elle se réduit à $\alpha(\mathrm{M})$ pour $t = 0$.

20. — Au point de vue physique (n° **13**, § 3°, p. 29), nous savons que la solution est unique. En effet, la loi de variation de la température V d'un corps dont la surface est à une température nulle, ne peut être indéterminée quand on connaît la température initiale α. Nous pouvons prévoir aussi que toutes les constantes caractéristiques doivent être positives : un corps dont la surface a constamment la température zéro aura une distribution de température qui tendra vers zéro. Or en se reportant à l'expression (67) de la température V, on voit qu'il ne peut en être ainsi si les λ_i ne sont pas tous positifs.

Mais ces deux faits sont susceptibles d'une démonstration mathématique. Nous avons supposé que la fonction R est positive.

La formule de Green (13), p. 119, nous donne

$$(68)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathrm{D}} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} d\omega_{\mathrm{P}} = -\int_{\mathrm{S}} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n_i}\, d\mathrm{S}_{\mathrm{P}} - \int_{\mathrm{D}} \varphi\, \Delta\varphi\, d\omega_{\mathrm{P}} \\ \displaystyle\qquad\qquad = \lambda \int_{\mathrm{D}} \mathrm{R(P)}\, \varphi^2\, d\omega_{\mathrm{P}}. \end{cases}$$

D'où il est évident que λ est positif.

Nous avons déjà démontré que la solution est unique au n° **14**, p. 34.

21. — Nous avons donc traité le problème intérieur relatif à l'équation (58) pour la condition $\mathrm{V} = 0$ sur la surface. Les problèmes intérieurs pour d'autres conditions, et les problèmes extérieurs se traitent d'une manière analogue. Cependant on rencontre certaines difficultés que nous allons indiquer.

Considérons la condition

$$(70)\qquad \mathrm{V} = f(\mathrm{M})$$

sur la surface S, la fonction V vérifiant (58) à l'*intérieur* de S.

Il est toujours possible de trouver une fonction harmonique indépendante de t, $\omega(\mathrm{M})$, qui prenne la valeur $f(\mathrm{M})$ sur la surface.

Posons

$$\mathrm{V} = v + \omega.$$

La fonction v satisfera aux équations suivantes

$$(71)\qquad \Delta v = \mathrm{R(M)}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad v = 0 \quad \text{sur la surface}$$

et

$$v = \alpha(\mathrm{M}) - \omega(\mathrm{M}) \quad \text{pour } t = 0.$$

Nous supposons pour que le problème soit possible que la valeur de V pour $t = 0$, soit $\alpha(\mathrm{M})$, satisfait à la condition (70), de sorte que $\alpha - \omega$ satisfait à (71). On est ainsi ramené au problème du nº **20**.

Donc v sera déterminée par la méthode précédente.

Le problème extérieur se traite d'une manière identique : dans ce cas la fonction V s'évanouit à l'infini ; on suppose que sa valeur initiale, la fonction α, s'évanouit aussi à l'infini.

Nous ne nous arrêterons pas aux conditions

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + p\,.\,\mathrm{V} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + p\,.\,\mathrm{V} = h.$$

Nous avons en effet démontré (nº **14**, p. 132) l'existence *en général* d'une fonction de Green pour la première de ces conditions. Elle nous permettrait de traiter ces cas d'une manière tout à fait analogue à la précédente, pour les problèmes intérieurs et extérieurs.

Pour le cas extérieur les conditions

$$(72) \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} = g(\mathrm{M})$$

sur la surface, se traitent par une analyse identique, mais il faut supposer que la fonction V et la fonction initiale α sont nulles à l'infini.

22. — Nous arrivons maintenant au cas intérieur pour la condition

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} = 0$$

sur la surface [toujours pour l'équation (58)].

Nous pouvons former une fonction de Green telle que

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \frac{4\pi}{\mathrm{S}}$$

sur la surface (voir nº **14**, cas 4º).

En refaisant la discussion du n° **17** après avoir effectué la substitution (61), nous obtenons l'équation intégrale analogue à (55)

$$\varphi(\mathrm{M}) = \frac{\lambda}{4\pi}\int_{\mathrm{D}} \mathfrak{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,\mathrm{R}(\mathrm{P})\,\varphi(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}}, \tag{73}$$

dont les solutions satisfont aux équations

$$\Delta\varphi = -\lambda \mathrm{R}\,\varphi,$$

$$\int_{\mathrm{D}} \mathrm{R}(\mathrm{M})\,\varphi(\mathrm{M})\,d\omega_{\mathrm{M}} = 0 \quad \text{dans le domaine D}$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur la surface.}$$

En raisonnant comme au n° **19**, on voit que nous pouvons développer une fonction $g(\mathrm{M})$ suivant une série de fonctions fondamentales relatives à l'équation (73), pourvu que

$$\frac{\partial g}{\partial n_i} = 0 \quad \text{sur la surface}$$

et

$$\int_{\mathrm{D}} g(\mathrm{M})\,\mathrm{R}(\mathrm{M})\,d\omega_{\mathrm{M}} = 0.$$

Nous supposons, bien entendu, que la valeur initiale de V, $\alpha(\mathrm{M})$, satisfait à la première de ces conditions. Elle ne satisfait pas en général à la seconde. Posons

$$\int_{\mathrm{D}} \alpha(\mathrm{M})\,\mathrm{R}(\mathrm{M})\,d\omega_{\mathrm{M}} = \mathrm{A}, \qquad \int_{\mathrm{D}} \mathrm{R}(\mathrm{M})\,d\omega_{\mathrm{M}} = \mathrm{B}.$$

Alors la fonction $\alpha(\mathrm{M}) - \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ est développable en série de fonctions fondamentales et l'on a

$$\alpha(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \mathrm{A}_1\,\varphi_1(\mathrm{M}) + \mathrm{A}_2\,\varphi_2(\mathrm{M}) + \ldots + \mathrm{A}_n\,\varphi_n(\mathrm{M}) + \ldots.$$

La solution sera

$$\text{(74)}\quad \mathrm{V}(\mathrm{M}, t) = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \mathrm{A}_1\,\varphi_1(\mathrm{M})\,e^{-\lambda_1 t} + \mathrm{A}_2\,\varphi_2(\mathrm{M})\,e^{-\lambda_2 t} + \ldots + \mathrm{A}_n\,\varphi_n(\mathrm{M})\,e^{-\lambda_n t} + \ldots.$$

Car cette expression satisfait à toutes les conditions.

Nous arrivons enfin à la condition

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i} = g(\mathrm{M}).$$

Ecrivons

$$\int_{\mathrm{S}} g(\mathrm{M})\,d\mathrm{S} = \mathrm{C}.$$

Et considérons la fonction

$$\mathrm{V}_1(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{D}} \mathrm{R}(\mathrm{P})\,\frac{1}{r}\,d\omega_{\mathrm{P}},$$

où r est la distance MP.

On a d'après (13), p. 23

$$\begin{aligned} &\Delta \mathrm{V}_1 = -4\pi\,\mathrm{R}(\mathrm{M}), \\ &\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n_i}\,d\mathrm{S} = \int_{\mathrm{S}} \left[\int_{\mathrm{D}} \mathrm{R}(\mathrm{P})\,\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{1}{r}\right)\,d\omega_{\mathrm{P}}\right] d\mathrm{S} = 4\pi \int_{\mathrm{D}} \mathrm{R}(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = \mathrm{C}'. \end{aligned}$$

Donc la fonction

$$\mathrm{U}_0 = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}'}\,(-4\pi\,t + \mathrm{V}_1)$$

est une solution de

$$\text{(75)}\qquad \Delta \mathrm{V} = \mathrm{R}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}$$

telle que

$$\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_i}\,d\mathrm{S} = \mathrm{C}.$$

Construisons une fonction harmonique U_1, indépendante de t et telle qu'on ait

$$\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial n_i} = g(\mathrm{M}) - \frac{\partial \mathrm{U}_0}{\partial n_i}.$$

Cela est possible par la méthode déjà exposée au n° **7**, p. 125, cas 3°, puisqu'on a

$$\int_S \frac{\partial U_1}{\partial n_i} dS = C - C = 0.$$

La fonction U_1 ne sera déterminée qu'à une constante arbitraire additive près ; mais ce fait n'a pas d'importance.

Ecrivons, enfin, la solution sous la forme

$$V = U_0 + U_1 + u.$$

La fonction u sera une solution de (58) qui pour $t = 0$ se réduit à la fonction connue

$$u_0 = \alpha(M) - \frac{C}{C'} V_1 - U_1$$

et qui satisfait à la condition

$$\frac{\partial u}{\partial n_i} = g(M) - \frac{\partial U_0}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial n} = 0.$$

La fonction initiale u_0 satisfait aussi à la condition

$$\frac{\partial u_0}{\partial n_i} = 0,$$

pourvu qu'on ait bien entendu $\dfrac{\partial \alpha}{\partial n_i} = g(M)$.

Donc il est possible de déterminer u par la méthode précédente et V est complètement connu [1].

23. — On verra que l'équation des ondes

$$\Delta V = R(M) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{59}$$

est susceptible d'un traitement presque identique. Il est nécessaire seulement d'indiquer en peu de mots quelles sont les différences.

---

[1] On peut démontrer qu'à la première constante caractéristique correspond une seule fonction fondamentale, laquelle est essentiellement positive. Voir Boussinesq. *Traité analytique de la chaleur.* Heywood, *Thèse*, p. 90.

Pour fixer les idées, proposons-nous ce problème : un gaz parfait est renfermé dans une surface fixe : on provoque une petite vibration quelconque du gaz, et on demande le mouvement du gaz à un instant ultérieur. A l'équation (59), il faut ajouter les conditions

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur la surface S} \tag{76}$$

et

$$\mathrm{V} = \alpha(\mathrm{M}), \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = \beta(\mathrm{M}), \quad \text{pour } t = 0, \tag{77}$$

la fonction V étant le potentiel de vitesses.

Un type de solution sera $\varphi(\mathrm{M}) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \lambda t$, où

$$\Delta\varphi = -\lambda^2 \mathrm{R}(\mathrm{M})\,\varphi(\mathrm{M}). \tag{78}$$

Construisons une fonction de Green $\mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ telle que

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n_{\mathrm{M}}} = \frac{4\pi}{\mathrm{S}}$$

sur S (n° **14**, 4°) ; à cette fonction nous pouvons ajouter une constante arbitraire (c'est-à-dire une fonction arbitraire de P).

La fonction φ sera donnée par

$$\varphi(\mathrm{M}) - \lambda^2 \int_{\mathrm{D}} \mathfrak{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \varphi(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} = 0 \tag{79}$$

pour une valeur convenable de λ^2. En effet, on a bien (78). Pour satisfaire à (76), remarquons que nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \lambda^2 \int_{\mathrm{D}} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n_{\mathrm{M}}}\, \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \varphi(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}} \\ &= \lambda^2 \frac{4\pi}{\mathrm{S}} \int_{\mathrm{D}} \mathrm{R}(\mathrm{P})\, \varphi(\mathrm{P})\, d\omega_{\mathrm{P}}.\end{aligned}$$

Or

$$\int_{\mathrm{D}} \mathrm{R}(\mathrm{P})\,\varphi(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}} = \lambda^2 \int_{\mathrm{D}}\int_{\mathrm{D}} \mathcal{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,\mathrm{R}(\mathrm{M})\,\mathrm{R}(\mathrm{P})\varphi(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}}\,d\omega_{\mathrm{M}}$$
$$= \lambda^2 \int_{\mathrm{D}} \left[\int_{\mathrm{D}} \mathcal{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,\mathrm{R}(\mathrm{M})\,d\omega_{\mathrm{M}}\right] \mathrm{R}(\mathrm{P})\,\varphi(\mathrm{P})\,d\omega_{\mathrm{P}}.$$

Par suite, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ sera nul pourvu que

$$\int_{\mathrm{D}} \mathcal{G}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,\mathrm{R}(\mathrm{M})\,d\omega_{\mathrm{M}} = 0.$$

Nous réaliserons cette dernière condition en choisissant convenablement la constante arbitraire mentionnée ci-dessus.

Nous pourrions aussi montrer comme au n° **20** que les constantes caractéristiques de l'équation intégrale (79), qui sont des valeurs de λ^2, sont positives, de sorte que λ est réelle ; mais à chaque constante caractéristique correspondent deux valeurs de λ, donc deux solutions de l'équation (59). Nous aurons de même qu'au n° **22**, comme solution, la série

$$\mathrm{V} = \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t)\,\varphi_n(x,y,z).$$

Nous satisferons aux conditions initiales en choisissant les a et les b de sorte que

$$\alpha(\mathrm{M}) = \sum_{1}^{\infty} a_n\,\varphi_n, \qquad \beta(\mathrm{M}) = \sum_{1}^{\infty} b_n\,\lambda_n\,\varphi_n,$$

ce qui est possible pourvu que

$$\frac{\partial\alpha}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial n} = 0$$

sur S.

24. Équation générale elliptique. — Considérons maintenant l'équation

$$(80) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a\,\frac{\partial V}{\partial x} + b\,\frac{\partial V}{\partial y} + c\,V = f,$$

où $a, b, c,\ f$ sont des fonctions de $x,\ y$ (que nous supposons avoir des dérivées premières et secondes), c'est-à-dire des fonctions d'un point M de l'aire renfermée par un contour plan.

L'application de la méthode de Fredholm à cette équation (80) a été faite par M. Emile Picard [1] ; nous allons tirer notre discussion de son mémoire [2].

Nous cherchons une solution de (80) qui s'annule sur le contour C d'une aire plane A, et qui est continue à l'intérieur de cette aire. Si l'on tient compte de la forme (13), p. 23 et de la note [2], p. 22, on voit que notre solution sera donnée par l'équation

$$(81) \quad \begin{cases} V(x,y) - \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint \left\{ a(\xi,\eta)\,\frac{\partial V}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\,\frac{\partial V}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)\,V \right\} \mathfrak{G}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ \qquad\qquad = \psi(x,y) \equiv \dfrac{-1}{2\pi} \displaystyle\iint f(\xi,\eta)\,\mathfrak{G}(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \end{cases}$$

(où $\mathfrak{G}$ est une fonction de Green — relative à l'équation $\Delta V = 0$ — qui s'annule sur C), expression que nous transformons en

$$(82) \qquad V(x,y) + \frac{1}{2\pi} \iint \left\{ \frac{\partial (a\mathfrak{G})}{\partial \xi} + \frac{\partial (b\mathfrak{G})}{\partial \eta} - c\,\mathfrak{G} \right\} V(\xi,\eta) d\xi\,d\eta = \psi(x,y),$$

en intégrant par parties.

La fonction de Green est comparable, à notre point de vue, à $\log \dfrac{1}{r}$, où r est la distance entre les points (x, y) et (ξ, η). Donc le noyau de l'équation (82) est comparable à $\dfrac{1}{r}$; et, d'après le n° **14**, p. 64, elle possède bien, en général, une solution V.

---

(1) Egalement par M. Hilbert : *Nachrichten zu Göttingen*, 1904, *Heft* 3, p. 248.
(2) *Rend. Circ. Matem. Palermo*, juillet 1906.

Pour achever la discussion, il faut montrer que cette fonction V nous permet de remonter de (82) à (81) et de (81) à (80). C'est-à-dire, il faut montrer que V a des dérivées premières et secondes.

Nous écrivons le noyau de (82), $K(x, y; \xi, \eta)$, et nous effectuons sur cette équation une «itération» (voir formule (7), p. 40).

Il vient

$$\left\{\begin{aligned} &V(x,y) - \iint K_2(x,y;\xi,\eta)\, V(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \\ &\qquad = \psi(x,y) - \iint K(x,y;\xi,\eta)\, \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right. \tag{83}$$

Or $\psi(x, y)$ est comparable avec un potentiel : elle a donc des dérivées secondes, puisque nous avons supposé que f a des dérivées premières ; la fonction K_2 est comparable avec $\log r$; de sorte que nous n'avons à nous occuper que du dernier terme. Il s'agit donc de voir par exemple que l'intégrale

$$\iint \frac{\partial(a\mathfrak{G})}{\partial \xi}\, \psi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

a des dérivées premières ; mais elle s'écrit

$$-\iint a\,\mathfrak{G} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\, d\xi\, d\eta, \tag{84}$$

et cette intégrale a des dérivées qui restent finies sur le bord.

Il faut maintenant examiner les dérivées secondes. Il est évident que

$$\iint K_2(x,y;\xi,\eta)\, V(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

a des dérivées secondes, puisque $V(\xi, \eta)$ a des dérivées premières. L'expression (84) a des dérivées secondes pourvu que ψ ait des dérivées secondes.

Donc l'existence des dérivées est établie.

Nous pouvons dire que notre problème a *en général* une solution unique. Mais il y a certains cas où il existe une solution du problème

quand nous faisons f égale à zéro : pour ces cas, — c'est-à-dire pour ces mêmes fonctions a, b, c — d'après la théorie de Fredholm (n° **21**, p. 70), le problème où f n'est pas identiquement nulle n'a pas de solution (à moins que $\psi(x, y)$ fût précisément nul).

NOTE A

ITÉRATION DES NOYAUX INFINIS DANS LE CAS DES INTÉGRALES DOUBLES [1]

1. — Nous savons que la résolution d'une équation de Fredholm

(1) $$\varphi(s) - \int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{K}(s,t)\, dt = f(s)$$

de noyau $\mathrm{K}(s,t)$ peut se ramener à celle d'une nouvelle équation de noyau

$$\mathrm{K}_2(s,t) = \int_a^b \mathrm{K}(s,t_1)\, \mathrm{K}(t_1,t)\, dt_1,$$

où $\mathrm{K}_2(s,t)$ est le noyau *itéré* une fois.

Nous avons vu (n° **14**, p. 64) l'effet d'une pareille itération pour une intégrale simple dont le noyau est susceptible de prendre des valeurs infinies de la forme

$$\mathrm{K}(s,t) = \frac{\mathrm{H}(s,t)}{(s-t)^\alpha}$$

(avec $\alpha < 1$ pour que les intégrales aient un sens) — $\mathrm{H}(s,t)$ restant fini — et nous avons constaté qu'après un nombre suffisant d'itérations on obtient un noyau qui reste fini.

Étudions au même point de vue le cas d'une intégrale double. Soit l'équation

(2) $$\varphi(\mathrm{M}) - \iint \varphi(\mathrm{P})\, \mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{P})\, ds_{\mathrm{P}} = f(\mathrm{M})$$

M et P étant deux points pris sur une surface et la $\iint$ étant étendue à cette surface.

Lorsque $\mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{P})$ devient infini, si l'on a, par exemple,

$$\mathrm{K}(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \frac{\mathrm{H}(\mathrm{M},\mathrm{P})}{\mathrm{PM}^\alpha}$$

---

[1] D'après une leçon professée par M. Hadamard, recueillie par M. Pérès, élève de l'Ecole Normale Supérieure.

(avec $\alpha < 2$ pour que la $\iint$ ait un sens), on parviendra encore — après un nombre suffisant d'itérations — à un noyau restant fini auquel la méthode de Fredholm s'applique.

2. — Prenons par exemple $\alpha = 1$; nous allons démontrer que le noyau itéré une fois — qui peut encore augmenter indéfiniment pour M et P voisins l'un de l'autre — n'est plus que logarithmiquement infini. On peut sans restreindre la généralité supposer que la surface est un morceau du plan des ξ, η (1).

Le noyau itéré est alors

$$\mathrm{K}_2(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \iint \frac{\mathrm{H}(\mathrm{M}, \mathrm{Q})\, \mathrm{H}(\mathrm{Q}, \mathrm{P})}{\mathrm{MQ} \cdot \mathrm{QP}}\, d\xi\, d\eta$$

(Q étant le point de coordonnées ξ, η). Considérons un cercle C de centre M, de rayon proportionnel à MP, de rayon 2MP par exemple et contenant P dans son intérieur.

Décomposons l'intégrale double en deux parties, l'une relative aux points Q *intérieurs* à cette circonférence, l'autre relative à Q *extérieur*.

La première intégrale est plus petite que

$$\chi^2 \iint_{\mathrm{C}} \frac{d\xi\, d\eta}{\mathrm{MQ} \cdot \mathrm{QP}}$$

χ étant la limite supérieure supposée finie de $\mathrm{H}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$.

Quant à

$$\iint_{\mathrm{C}} \frac{d\xi\, d\eta}{\mathrm{MQ} \cdot \mathrm{QP}},$$

un changement de variables par similitude amenant le rayon du cercle C à l'unité ne la modifie pas, elle reste donc finie quand M et P tendent l'un vers l'autre et il en est de même de notre première intégrale.

(1) En effet, lorsque M et P sont voisins l'un de l'autre, on peut, entre la portion de surface (supposée régulière) qui les contient et une portion de plan, établir une correspondance telle que le rapport de deux éléments de surface qui se correspondent soit compris entre deux limites finies et qu'il en soit de même pour le rapport entre la distance de deux points quelconques et celle de leurs homologues.

Dans la deuxième intégrale, on peut remplacer QP par MQ, car le rapport de ces deux quantités reste compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$: elle augmente dès lors indéfiniment au plus comme $\log \mathrm{MP}$, ainsi qu'on s'en assure immédiatement en passant aux coordonnées polaires de pôle M. C'est bien le résultat annoncé.

Une seconde itération (que l'on pourrait même éviter) nous ramènera à un noyau fini.

3. — La circonstance précédente se présente dans la résolution du problème de Dirichlet à trois dimensions par la méthode de Fredholm.

Dans le cas de deux dimensions, le noyau

$$\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \frac{1}{\pi} \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn_{\mathrm{P}}} = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(r, n)}{r} \quad \text{avec} \quad r = \mathrm{MP}$$

reste fini quand M tend vers P, car $\frac{\cos(r, n)}{r}$ tend vers $\frac{\gamma}{2}$, γ étant la courbure en P.

Dans le cas de trois dimensions au contraire

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dn_{\mathrm{P}}} = \frac{\cos(n, r)}{r^2}$$

tend vers l'infini comme $\frac{1}{r}$.

C'est le cas étudié précédemment : deux itérations nous donneront un noyau fini auquel s'appliquera la méthode de Fredholm.

Le cas où $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{H}(\mathrm{M}, \mathrm{P})}{\mathrm{MP}^{\alpha}}$ et où $\alpha \neq 1$ s'étudie comme le cas où $\alpha = 1$.

On partage comme précédemment l'intégrale

$$\mathrm{K}_2(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \iint \frac{\mathrm{H}(\mathrm{M}, \mathrm{Q})\, \mathrm{H}(\mathrm{Q}, \mathrm{P})}{\mathrm{MQ}^{\alpha}\, \mathrm{QP}^{\alpha}} \, d\xi \, d\eta.$$

L'intégrale étendue à l'intérieur du cercle est inférieure en valeur absolue à

$$\chi^2 \iint_{\mathrm{C}} \frac{d\xi \, d\eta}{\mathrm{MQ}^{\alpha}\, \mathrm{QP}^{\alpha}}$$

et l'intégrale

$$\iint_C \frac{d\xi\, d\eta}{\mathrm{MQ}^\alpha\, \mathrm{QP}^\alpha}$$

vaut $\dfrac{1}{(2\mathrm{MP})^{2\alpha-2}}$ fois l'intégrale analogue étendue à la figure semblable telle que le cercle soit de rayon 1, cette dernière intégrale étant une quantité finie fixe.

L'intégrale étendue à l'extérieur du cercle se comporte aussi comme $\dfrac{\mathrm{A}}{(\mathrm{MP})^{2\alpha-2}}$ quand MP et par suite le rayon du cercle tendent vers 0.

Si donc $\alpha < 1$, une seule itération nous aura amené à un noyau fini. Si $\alpha > 1$, nous avons remplacé l'exposant α par l'exposant plus petit (puisque $\alpha < 2$), $2\alpha - 2$.

Il n'est pas bien difficile de voir qu'un nombre fini d'itérations nous amènera dans ce cas à un noyau fini.

4. — Il est clair que la même méthode s'appliquerait sans modification pour le cas de domaines à un nombre quelconque de dimensions, toutes les fois que le noyau deviendrait infini comme l'inverse d'une certaine puissance de la distance entre les deux points M, P mobiles dans un pareil domaine.

Ajoutons que l'intégrale par l'étude de laquelle nous venons de commencer, savoir l'intégrale plane

$$\iint \frac{d\xi\, d\eta}{\mathrm{MQ}\,.\,\mathrm{QP}},$$

conduit à une formule particulièrement simple lorsqu'on considère la différence de deux intégrales analogues, soit par exemple

$$\mathrm{I} = \iint \left(\frac{1}{\mathrm{MQ}\,.\,\mathrm{QP}} - \frac{1}{\mathrm{MQ}\,.\,\mathrm{QP}'} \right) d\xi\, d\eta, \tag{3}$$

(ξ, η étant toujours les ordonnées du point Q, pendant que M, P, P′ sont trois points fixes du plan). Une telle intégrale reste finie lorsqu'on l'étend au *plan tout entier*, et la méthode employée plus haut en fournit, dans ces conditions, la valeur exacte. Si, en effet, on limite tout d'abord l'aire

d'intégration à l'intérieur d'un cercle déterminé C de centre M, on pourra, d'une manière analogue à ce qui a été fait tout à l'heure, remplacer

$$\iint_{\mathrm{C}} \frac{d\xi\, d\eta}{\mathrm{MQ} \cdot \mathrm{QP}}$$

par

$$\iint \frac{d\xi\, d\eta}{\mathrm{MQ} \cdot \mathrm{QP}'}, \tag{4}$$

étendue à un cercle C' homothétique à C par rapport à M, avec le rapport de similitude $\dfrac{\mathrm{MP}'}{\mathrm{MP}}$. L'intégrale (3) étendue à C, peut donc se remplacer par l'intégrale (4) étendue à la couronne comprise entre C et C'. En faisant croître indéfiniment le rayon de C, on trouve ainsi, pour l'intégrale relative à tout le plan,

$$\mathrm{I} = 2\pi \log \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MP}'}.$$

Bien entendu, il en résulte, pour l'intégrale

$$\mathrm{I}_1 = \iint d\xi\, d\eta \left(\frac{1}{\mathrm{MQ} \cdot \mathrm{QP}} - \frac{1}{\mathrm{M'Q} \cdot \mathrm{QP}'} \right)$$

(où M, M', P, P' sont quatre points fixes), étendue à tout le plan, la valeur

$$\mathrm{I}_1 = 2\pi \log \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{M'P'}}.$$

Enfin, on pourrait opérer de même en remplaçant $\dfrac{1}{\mathrm{MQ} \cdot \mathrm{QP}}$ par n'importe quelle fonction homogène de degré -2 de MQ, QP, non susceptible de devenir infinie le long d'une ligne, par exemple,

$$\frac{1}{a \cdot \mathrm{MQ}^2 + b \cdot \mathrm{MQ} \cdot \mathrm{QP} + c \cdot \mathrm{QP}^2},$$

où la forme quadratique (à coefficients constants) qui figure au dénominateur ne s'annule pour aucune valeur positive du rapport $\dfrac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QP}}$.

On pourrait également écrire des formules analogues dans l'espace à trois dimensions (la fonction homogène devant alors être de degré -3), etc.

NOTE B

PROPRIÉTÉS DE LA RÉSOLVANTE DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM

Nous allons donner ici une étude un peu plus approfondie des propriétés de l'équation de Fredholm

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s), \tag{1}$$

dans le cas d'un noyau K quelconque. On trouvera intérêt à comparer les résultats obtenus avec ceux du cas symétrique (p. 89 – 114), qu'ils généralisent en partie. Nous nous bornerons à développer les idées essentielles sans nous occuper de donner les démonstrations rigoureuses, pour lesquelles nous renvoyons le lecteur aux mémoires cités [1].

1. Les noyaux orthogonaux. — On appelle ainsi deux noyaux $\mathrm{K}_1(s,t)$, $\mathrm{K}_2(s,t)$ qui satisfont aux deux relations

$$\int_a^b \mathrm{K}_1(\tau,t)\,\mathrm{K}_2(s,\tau)\,d\tau = 0, \tag{2}$$

$$\int_a^b \mathrm{K}_1(s,\tau)\,\mathrm{K}_2(\tau,t)\,d\tau = 0. \tag{3}$$

Nous allons démontrer les deux propositions suivantes :

Si nous écrivons

$$\mathrm{K}(s,t) = \mathrm{K}_1(s,t) + \mathrm{K}_2(s,t), \tag{4}$$

$\mathrm{K}_1(s,t)$ *et* $\mathrm{K}_2(s,t)$ *étant orthogonaux, nous aurons*

$$(1^{\circ}) \quad \mathrm{K}(s,t,\lambda) = \mathrm{K}_1(s,t,\lambda) + \mathrm{K}_2(s,t,\lambda), \tag{5}$$

$$(2^{\circ}) \quad \mathrm{D}(\lambda) = \mathrm{D}_1(\lambda) \times \mathrm{D}_2(\lambda), \tag{6}$$

---

[1] H.-B. Heywood. — *Comptes Rendus*, 25 novembre 1907 ; *Thèse*, 1908 ; *Journal de Mathématiques*, octobre 1908.
E. Goursat. — *Comptes Rendus*, octobre et novembre 1907 ; *Annales de la Fac. d. Sc. de Toulouse*, t. X, 1908.
M. Goursat démontre ces résultats par un noyau intégral *borné*.

où nous avons adopté la notation habituelle.

Pour démontrer le premier résultat, souvenons-nous que nous avons (formule (46), p. 61) les deux relations

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{K}_1(s,t,\lambda) - \mathrm{K}_1(s,t) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}_1(s,\tau)\,\mathrm{K}_1(\tau,t,\lambda)\,d\tau,$$

$$\text{(8)} \qquad = \lambda \int_a^b \mathrm{K}_1(\tau,t)\,\mathrm{K}_1(s,\tau,\lambda)\,d\tau,$$

et les mêmes équations avec l'indice 2 — (7_1), (8_1).

Nous multiplions l'équation (8) par $\mathrm{K}_2(t,t')$ et nous intégrons par rapport à t : il vient, en tenant compte de (2)

$$\text{(9)} \qquad \int_a^b \mathrm{K}_1(s,t,\lambda)\,\mathrm{K}_2(t,t')\,dt = 0.$$

De même

$$\text{(10)} \qquad \int_a^b \mathrm{K}_1(s,t,\lambda)\,\mathrm{K}_2(t',s)\,ds = 0,$$

de sorte que $\mathrm{K}_1(s,t,\lambda)$, $\mathrm{K}_2(s,t)$ sont orthogonaux.

Pareillement $\mathrm{K}_1(s,t)$, $\mathrm{K}_2(s,t,\lambda)$ sont orthogonaux.

Ajoutons les équations (7) et (7_1) : nous aurons

$$\begin{aligned}
\big[\mathrm{K}_1(s,t,\lambda) + \mathrm{K}_2(s,t,\lambda)\big] - \mathrm{K}(s,t)&\\
&= \lambda \int_a^b \big[\mathrm{K}_1(s,\tau)\,\mathrm{K}_1(\tau,t,\lambda) + \mathrm{K}_2(s,\tau)\,\mathrm{K}_2(\tau,t,\lambda)\big]\,d\tau,\\
&= \lambda \int_a^b \big[\mathrm{K}_1(s,\tau) + \mathrm{K}_2(s,\tau)\big]\big[\mathrm{K}_1(\tau,t,\lambda) + \mathrm{K}_2(\tau,t,\lambda)\big]\,d\tau,\\
&= \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\big[\mathrm{K}_1(\tau,t,\lambda) + \mathrm{K}_2(\tau,t,\lambda)\big]\,d\tau.
\end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction $\big[\mathrm{K}_1(s,t,\lambda) + \mathrm{K}_2(s,t,\lambda)\big]$ est déterminée par les mêmes équations fonctionnelles (46, p. 61), que la résolvante $\mathrm{K}(s,t,\lambda)$, et puisque leur solution est unique (n^{o} **5**, p. 43), nous avons l'égalité (5).

Pour démontrer la seconde égalité (2°), nous nous servons de la formule (50bis) du n° **17** (p. 68)

$$\text{(11)} \qquad \frac{d}{d\lambda}\big(\log \mathrm{D}(\lambda)\big) = -\int_a^b \mathrm{K}(s,s,\lambda)\,ds,$$
$$= -\int_a^b \big[\mathrm{K}_1(s,s,\lambda) + \mathrm{K}_2(s,s,\lambda)\big]\,ds,$$
$$= \frac{d}{d\lambda}\big[\log \mathrm{D}_1(\lambda) + \log \mathrm{D}_2(\lambda)\big],$$
$$= \frac{d}{d\lambda}\big\{\log\big[\mathrm{D}_1(\lambda) \times \mathrm{D}_2(\lambda)\big]\big\},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{D}(\lambda) = \mathrm{C} \times \mathrm{D}_1(\lambda) \times \mathrm{D}_2(\lambda).$$

Pour achever, il faut démontrer que la constante C est égale à l'unité. Il suffit de faire $\lambda = 0$

$$\mathrm{D}(0) = 1 = \mathrm{D}_1(0) \times \mathrm{D}_2(0).$$

Donc nous avons l'égalité (6) (2°).

2. — De la dernière proposition il résulte que si λ_1 est une constante caractéristique de $\mathrm{K}_1(s,t)$ ou de $\mathrm{K}_2(s,t)$, elle sera aussi une constante caractéristique de $\mathrm{K}(s,t)$. Cela posé, nous allons démontrer la proposition suivante :

Les solutions de

$$\text{(12)} \qquad \varphi_1(s) - \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}_1(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt = 0$$

et les solutions de

$$\text{(13)} \qquad \varphi_2(s) - \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}_2(s,t)\,\varphi_2(t)\,dt = 0$$

sont aussi des solutions de

$$\text{(14)} \qquad \varphi(s) - \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0.$$

Les solutions de (14) *sont des fonctions linéaires des solutions de* (11) *et de* (12).

On n'oubliera pas que la solution de (12) ou de (13) doit se réduire (n° **21**, p. 70) à zéro si λ_1 n'est pas constante caractéristique de K_1 ou de K_2.

Nous multiplions (12) par $\mathrm{K}_2(r,s)$ et nous intégrons :

$$\int_a^b \mathrm{K}_2(r,s)\,\varphi_1(s)\,ds = \lambda_1 \int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}_2(r,s)\,\mathrm{K}_1(s,t)\,ds\right] \varphi_1(t)\,dt = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) - \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt \\ = \varphi_1(s) - \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}_1(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt - \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}_2(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que $\varphi_1(s)$ est une solution de (14). De même $\varphi_2(s)$ est aussi une solution de (14).

Réciproquement, soit $\varphi(s)$ une solution quelconque de (14).

Posons

$$(15) \qquad \begin{cases} \lambda_1 \displaystyle\int_a^b \mathrm{K}_1(s,t)\,\varphi(t)\,dt = \Phi_1(s) \\ \qquad\qquad \varphi(s) = \Phi_1(s) + \Phi_2(s). \end{cases}$$

Je vais démontrer que $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ sont des solutions de (12) et de (13) respectivement. Des équations (14) et (15) on tire

$$(16) \qquad \Phi_2(s) = \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}_2(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

d'où il résulte

$$\int_a^b \mathrm{K}_1(s,t)\,\Phi_2(t)\,dt = \lambda_1 \int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{K}_1(s,t)\,\mathrm{K}_2(t,\tau)\,dt\right] \varphi(\tau)\,d\tau = 0,$$

et d'après (15),

$$\Phi_1(s) - \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}_1(s,t)\,\Phi_1(t)\,dt = \lambda_1 \int_a^b \mathrm{K}_1(s,t)\,\Phi_2(t)\,dt = 0,$$

c'est-à-dire que $\Phi_1(s)$ est une solution de (12). De même en nous servant de (14), nous pouvons démontrer que $\Phi_2(s)$ est une solution de (13).

3. Partie d'un noyau relative à une constante caractéristique. — La résolvante $\mathrm{K}(s,t,\lambda)$ du noyau $\mathrm{K}(s,t)$, dans le voisinage du point $\lambda = \lambda_1$, où λ_1 est une constante caractéristique, peut s'écrire comme au n^o **21**, p. 70, sous la forme

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{K}(s,t,\lambda) = \dfrac{\varphi_r(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^r} + \dfrac{\varphi_{r-1}(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)^{r-1}} + \ldots + \dfrac{\varphi_1(s,t)}{(\lambda_1-\lambda)} + \varphi_0(s,t,\lambda) \\ \qquad\qquad\; = \chi(s,t,\lambda) + \varphi_0(s,t,\lambda), \end{cases}$$

où $\varphi_0(s,t,\lambda)$ est une fonction continue de λ.

Nous appelons $\chi(s,t,\lambda)$ *la partie de la résolvante relative à la constante caractéristique* λ_1 ; pour $\lambda = 0$, nous avons

$$\mathrm{K}(s,t) = \chi(s,t,0) + \varphi_0(s,t,0),$$

soit

$$= \chi(s,t) + \varphi_0(s,t),$$

où

$$\chi(s,t) = \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^r} + \frac{\varphi_{r-1}(s,t)}{\lambda_1^{r-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1}.$$

Nous appelons $\chi(s,t)$ *la partie du noyau* $\mathrm{K}(s,t)$ *relative à* λ_1.

Nous allons démontrer que les deux fonctions $\chi(s,t)$, $\varphi_0(s,t)$ sont *orthogonales.* De plus, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ sont les constantes caractéristiques du noyau $\mathrm{K}(s,t)$, à chacun de ces nombres correspond une partie

$$\varphi^{(1)}(s,t),\ \varphi^{(2)}(s,t),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(s,t),\ \ldots.$$

Ces parties sont orthogonales entre elles. Si la série

$$\mathrm{H}(s,t) = \varphi^{(1)}(s,t) + \varphi^{(2)}(s,t) + \ldots + \varphi^{(n)}(s,t) + \ldots$$

est uniformément convergente, nous n'aurons pas en général

$$\mathrm{K}(s,t) = \mathrm{H}(s,t).$$

En posant

$$\mathrm{K}(s,t) = \mathrm{H}(s,t) + \varphi^{(\infty)}(s,t),$$

nous appellerons $\varphi^{(\infty)}(s,t)$ la partie relative à l'infini : *elle est biorthogonale à toutes les autres parties.*

Nous n'entrerons pas dans les détails, qu'on trouvera dans les mémoires cités, de la démonstration de ces propriétés. Nous nous bornerons aux idées principales.

Il nous sera utile d'établir d'abord quelques relations entre les fonctions $\varphi_1(s,t), \varphi_2(s,t) \ldots$.

Rappelons dans ce but la formule (11) :

$$\int_a^b \mathrm{K}(s,s,\lambda)\,ds = -\frac{d}{d\lambda}\big[\log \mathrm{D}(\lambda)\big]. \tag{11}$$

Si λ_1 est un zéro de $\mathrm{D}(\lambda)$ d'ordre p, nous aurons

$$\mathrm{D}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^p\,\mathrm{E}(\lambda),$$

où

$$\mathrm{E}(\lambda_1) \neq 0.$$

Donc

$$\frac{d}{d\lambda}\big[\log \mathrm{D}(\lambda)\big] = -\frac{p}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{d}{d\lambda}\big[\log \mathrm{E}(\lambda)\big].$$

L'expression $\dfrac{d}{d\lambda}\big[\log \mathrm{E}(\lambda)\big]$ reste finie lorsque λ tend vers λ_1, et nous tirons de (11) l'équation

$$\lim_{\lambda=\lambda_1} (\lambda_1 - \lambda) \int_a^b \mathrm{K}(s,s,\lambda)\,ds = +p. \tag{18}$$

De (17) et (18) il résulte que

$$(19) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \varphi_r(s,s)\,ds = 0, \ \int_a^b \varphi_{r-1}(s,s)\,ds = 0, \ \ldots, \ \int_a^b \varphi_2(s,s)\,ds = 0, \\ \displaystyle\int_a^b \varphi_1(s,s)\,ds = p. \end{cases}$$

Reprenons d'autre part, les équations (46) du n° **11**, p. 61, sous la forme suivante :

$$(20) \quad \begin{cases} -\,\mathrm{K}(s,t) + \mathrm{K}(s,t,\lambda) \\ \displaystyle = (\lambda-\lambda_1)\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t,\lambda)\,d\tau + \lambda_1\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\mathrm{K}(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ \displaystyle = (\lambda-\lambda_1)\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau,\lambda)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau + \lambda_1\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau,\lambda)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau. \end{cases}$$

Nous substituons ensuite l'expression de $\mathrm{K}(s,t,\lambda)$ tirée de (17) dans les équations (20) et nous égalons non plus seulement les coefficients de $(\lambda_1-\lambda)^{-r}$, mais ceux de $(\lambda_1-\lambda)^{-1}, (\lambda_1-\lambda)^{-2}, \ldots, (\lambda_1-\lambda)^{-r+1}$, dans les trois membres. Ceci nous donne comme à la page 70,

$$(21) \quad \varphi_r(s,t) - \lambda_1\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_r(\tau,t)\,d\tau = \varphi_r(s,t) - \lambda_1\int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_r(s,\tau)\,d\tau = 0,$$

$$(22) \quad \begin{cases} \displaystyle\varphi_{r-1}(s,t) - \lambda_1\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_{r-1}(\tau,t)\,d\tau = -\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_r(\tau,t)\,d\tau \\ \displaystyle\varphi_{r-1}(s,t) - \lambda_1\int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_{r-1}(s,\tau)\,d\tau = -\int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_r(s,\tau)\,d\tau, \end{cases}$$

. . . .

$$(23) \quad \begin{cases} \displaystyle\varphi_1(s,t) - \lambda_1\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_1(\tau,t)\,d\tau = -\int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_2(\tau,t)\,d\tau \\ \displaystyle\varphi_1(s,t) - \lambda_1\int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_1(s,\tau)\,d\tau = -\int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_2(s,\tau)\,d\tau, \end{cases}$$

et

$$(24)\quad \begin{cases} \varphi_0(s,t,\lambda) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \mathrm{K}(s,t) - \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_1(\tau,t)\,d\tau \\ \varphi_0(s,t,\lambda) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_0(s,\tau,\lambda)\,d\tau = \mathrm{K}(s,t) - \int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_1(s,\tau)\,d\tau. \end{cases}$$ [1]

On transforme ces équations pour leur donner les formes suivantes

$$(25)\quad \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_r(\tau,t)\,d\tau = \int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_r(s,\tau)\,d\tau = \frac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1},$$

$$(26)\quad \begin{cases} \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_{r-1}(\tau,t)\,d\tau = \int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_{r-1}(s,\tau)\,d\tau \\ \qquad = \dfrac{\varphi_{r-1}(s,t)}{\lambda_1} + \dfrac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^2}, \end{cases}$$

. . . .

$$(27)\quad \begin{cases} \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_1(\tau,t)\,d\tau = \int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_1(s,\tau)\,d\tau \\ \qquad = \dfrac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1} + \dfrac{\varphi_2(s,t)}{\lambda_1^2} + \ldots + \dfrac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^r} \\ \qquad = \chi(s,t), \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau)\,\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(\tau,t)\,\varphi_0(s,\tau,\lambda)\,d\tau \\ \qquad = -\mathrm{K}(s,t) + \varphi_0(s,t,\lambda) + \dfrac{\varphi_1(s,t)}{\lambda_1} + \ldots + \dfrac{\varphi_r(s,t)}{\lambda_1^r} \\ \qquad = \varphi_0(s,t,\lambda) - \varphi_0(s,t,0). \end{cases}$$ [1]

On multiplie ensuite l'équation

$$(20^{\text{bis}})\quad \mathrm{K}(s,t,\lambda) - \mathrm{K}(s,t) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,\tau,\lambda)\,\mathrm{K}(\tau,t)\,d\tau = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(\tau,t,\lambda)\,\mathrm{K}(s,\tau)\,d\tau$$

---

[1] On peut écrire simplement ces formules en remplaçant les premiers membres par $\mathrm{S}_{\varphi_r}, \mathrm{S}_{\varphi_{r-1}}, \ldots, \mathrm{S}_{\varphi_0}$, au moyen de la notation introduite au n° **5**, p. 43.

par $\varphi_r(t, u)$ et on l'intègre par rapport à t. En se servant de (25) on a, après un léger changement de notation,

$$\int_a^b \mathrm{K}(s, \tau, \lambda)\, \varphi_r(\tau, t)\, d\tau = \int_a^b \mathrm{K}(\tau, t, \lambda)\, \varphi_r(s, \tau)\, d\tau = \frac{\varphi_r(s, t)}{\lambda_1 - \lambda}. \tag{29}$$

Et de la même manière on obtient les autres équations

$$\left\{\begin{aligned} \int_a^b \mathrm{K}(s, \tau, \lambda)\, \varphi_{r-1}(\tau, t)\, d\tau &= \int_a^b \mathrm{K}(\tau, t, \lambda)\, \varphi_{r-1}(s, \tau)\, d\tau \\ &= \frac{\varphi_{r-1}(s, t)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_r(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^2}, \end{aligned}\right. \tag{30}$$

. . . .

$$\left\{\begin{aligned} \int_a^b \mathrm{K}(s, \tau, \lambda)\, \varphi_1(\tau, t)\, d\tau &= \int_a^b \mathrm{K}(\tau, t, \lambda)\, \varphi_1(s, \tau)\, d\tau \\ &= \frac{\varphi_1(s, t)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_2(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^2} + \dots + \frac{\varphi_r(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^r} \\ &= \chi(s, t, \lambda). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

On se sert de nouveau de l'équation (17) pour séparer dans les équations (29), (30), (31) les coefficients de $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda}, \dfrac{1}{(\lambda_1 - \lambda)^2}, \dots, \dfrac{1}{(\lambda_1 - \lambda)^r}$, et l'on obtient ainsi une série d'équations qui se résument sous la forme suivante :

$$\int_a^b \varphi_m(s, \tau)\, \varphi_n(\tau, t)\, d\tau \left\{\begin{aligned} &= \int_a^b \varphi_n(s, \tau)\, \varphi_m(\tau, t)\, d\tau = 0, \\ &\qquad \text{si } m + n > r + 1, \\ &= \varphi_{m+n-1}(s, t), \\ &\qquad \text{si } m + n \leqslant r + 1, \end{aligned}\right. \tag{32}$$

$$\int_a^b \varphi_m(s, \tau)\, \varphi_0(\tau, t, \lambda)\, d\tau = \int_a^b \varphi_0(s, \tau, \lambda)\, \varphi_m(\tau, t)\, d\tau = 0, \tag{33}$$

pour toute valeur de $m \neq 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver les propriétés énoncées.

4. — A l'aide de (33) on peut démontrer que les deux parties de

$$\mathrm{K}(s,t) = \chi(s,t) + \varphi_0(s,t)$$

sont orthogonales. On a, pour toute valeur régulière de λ, μ,

$$\int_a^b \chi(s,\tau,\lambda)\,\varphi_0(\tau,t,\mu)\,d\tau = \int_a^b \varphi_0(s,\tau,\mu)\,\chi(\tau,t,\lambda)\,d\tau = 0. \tag{34}$$

Il suffit pour le voir de remplacer $\chi(s,\tau,\lambda)$ dans cette expression par son développement

$$\chi(s,\tau,\lambda) = \frac{\varphi_r(s,\tau)}{(\lambda_1-\lambda)^r} + \ldots + \frac{\varphi_1(s,r)}{\lambda_1-\lambda}$$

et de tenir compte de (33).

En faisant $\lambda = \mu = 0$ dans (34), on voit bien que $\chi(s,t)$, $\varphi_0(s,t)$ sont orthogonales. D'autre part en y remplaçant λ par 0, μ par λ, nous avons, d'après (28),

$$\left\{\begin{aligned} -\varphi_0(s,t) + \varphi_0(s,t,\lambda) &= \lambda \int_a^b \varphi_0(s,\tau)\,\varphi_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= \lambda \int_a^b \varphi_0(\tau,t)\,\varphi_0(s,\tau,\lambda)\,d\tau, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

et, d'après (20bis) et (17)

$$\left\{\begin{aligned} -\chi(s,t) + \chi(s,t,\lambda) &= \lambda \int_a^b \chi(s,\tau)\,\chi(\tau,t,\lambda)\,d\tau \\ &= \lambda \int_a^b \chi(\tau,t)\,\chi(s,\tau,\lambda)\,d\tau. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

On peut donc dire que les fonctions $\varphi_0(s,t)$ et $\chi(s,t)$ sont orthogonales et ont respectivement pour résolvantes les fonctions $\varphi_0(s,t,\lambda)$, $\chi(s,t,\lambda)$. Il en résulte que nous pouvons appliquer les considérations du n^{o} **1**, et que, pour calculer les solutions de l'équation intégrale homogène (14), *nous pouvons considérer à part la partie* $\chi(s,t)$ *du noyau* $\mathrm{K}(s,t)$ *relative à* λ_1.

Le déterminant $\mathrm{E}(\lambda)$ de $\chi(s,t)$ est donné par la formule (11) qui devient ici

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\log \mathrm{E}(\lambda)\right] = -\int_a^b \chi(s,s,\lambda)\,ds = \frac{-p}{\lambda_1 - \lambda} = \frac{p}{\lambda - \lambda_1},$$

la seconde égalité provenant de (19).

Par conséquent,

$$\mathrm{E}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^p \times \text{const.}$$

Mais

$$\mathrm{E}(0) = 1,$$

d'où

(37) $$\mathrm{E}(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p.$$

C'est *le facteur du déterminant* $\mathrm{D}(\lambda)$ *de* $\mathrm{K}(s,t)$ *relatif à la partie* $\chi(s,t)$.

On peut démontrer enfin que les parties du noyau relatives à deux constantes caractéristiques sont orthogonales.

Soient, en effet, $\chi_1(s,t)$, $\chi_2(s,t)$ les parties du noyau $\mathrm{K}(s,t)$ relatives à λ_1, λ_2 ; soient $\chi_1(s,t,\lambda)$, $\chi_2(s,t,\lambda)$ les parties correspondantes de la résolvante. On peut poser

$$\mathrm{K}(s,t,\lambda) = \chi_1(s,t,\lambda) + \chi_2(s,t,\lambda) + \psi_0(s,t,\lambda),$$

et, en appliquant les formules (34) — où l'on a permuté μ et λ — pour $\mu = 0$

$$\begin{aligned}\int_a^b &\chi_1(s,\tau)\left[\chi_2(\tau,t,\lambda) + \psi_0(\tau,t,\lambda)\right] dt \\ = \int_a^b &\chi_1(\tau,t)\left[\chi_2(s,\tau,\lambda) + \psi_0(s,\tau,\lambda)\right] d\tau = 0.\end{aligned}$$

La fonction $\psi_0(s,t,\lambda)$ reste finie lorsque λ s'approche de λ_2 ; donc, en se souvenant de la forme de $\chi_2(s,t,\lambda)$, en l'introduisant dans l'égalité

précédente et annulant les termes en $\frac{1}{\lambda-\lambda_2}$, $\frac{1}{(\lambda-\lambda_2)^2}$, ..., il restera

$$\int_a^b \chi_1(s,\tau)\,\chi_2(\tau,t,\lambda)\,d\tau = \int_a^b \chi_1(\tau,t)\,\chi_2(s,\tau,\lambda)\,d\tau = 0.$$

Faisant $\lambda = 0$, on aura enfin

$$\int_a^b \chi_1(s,\tau)\,\chi_2(\tau,t)\,d\tau = \int_a^b \chi_1(\tau,t)\,\chi_2(s,\tau)\,d\tau = 0. \tag{35}$$

Nous avons donc démontré que $\chi_1(s,t)$, $\chi_2(s,t)$ sont orthogonales.

5. Fonctions principales. — Envisageons maintenant la fonction $\varphi_r(s,t)$. L'équation (21) indique qu'elle est une solution de chacune des équations associées de Fredholm sans second membre pour $\lambda = \lambda_1$. Celles-ci ont le même nombre q de solutions linéairement indépendantes. Donc, considérée comme une fonction de s, $\varphi_r(s,t)$ est la somme de q fonctions linéairement indépendantes au plus, les coefficients étant certaines fonctions de t. De même, considérée comme une fonction de t, $\varphi_r(s,t)$ est la somme de q fonctions indépendantes au plus. Nous pouvons écrire $\varphi_r(s,t)$ sous la forme

$$\varphi_r(s,t) = \sum_{k=1}^{q} \xi_k(s)\,\eta_k(t).$$

D'après l'équation (22) on voit que $\varphi_{r-1}(s,t)$ est une solution de chacune de deux équations associées de Fredholm, avec second membre, pour $\lambda = \lambda_1$. Les conditions pour l'existence des solutions sont nécessairement remplies, d'après (32). La forme des équations (22) démontre que $\varphi_{r-1}(s,t)$ est aussi la somme d'un nombre fini de produits :

$$\varphi_{r-1}(s,t) = \sum_{k=1}^{k=m} \theta_k(s)\,\rho_k(t).$$

Nous examinons de proche en proche toutes les fonctions $\varphi_{r-2}(s,t)$, $\varphi_{r-3}(s,t), \dots, \varphi_1(s,t)$, et nous trouvons enfin que $\varphi_1(s,t)$ est aussi la somme d'un nombre fini de produits :

$$\varphi_1(s,t) = \sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k(s)\,\psi_k(t). \tag{36}$$

Substituons cette expression dans une des équations (32) :

$$\int_a^b \varphi_1(s,\tau)\,\varphi_1(\tau,t)\,d\tau = \varphi_1(s,t).$$

Il en résulte

$$\sum_k \sum_j \varphi_k(s)\,\psi_j(t) \int_a^b \varphi_j(\tau)\,\psi_k(\tau)\,d\tau = \sum_k \varphi_k(s)\,\psi_k(t).$$

On peut s'arranger pour que les fonctions $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ soient linéairement indépendantes, et que les fonctions $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ soient aussi indépendantes. Dans ces conditions, égalons les coefficients de $\varphi_k(s)$, $\psi_j(t)$ dans les deux membres. Ceci nous donne les relations

$$(37) \qquad \int_a^b \varphi_k(s)\,\psi_j(s)\,ds \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad k \neq j, \\ = 1 & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$$

D'où, en intégrant l'expression (36) pour $s = t$

$$\int_a^b \varphi_1(s,s)\,ds = n.$$

Rappelons une des équations (19),

$$\int_a^b \varphi_1(s,s)\,ds = p,$$

où p est le degré du zéro λ_1 de $\mathrm{D}(\lambda)$.

Nous obtenons $n = p$,

$$(38) \qquad \varphi_1(s,t) = \sum_1^p \varphi_k(s)\,\psi_k(t).$$

Nous appellerons les $2p$ fonctions

$$(39) \qquad \begin{cases} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \ldots, & \varphi_p(s), \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \ldots, & \psi_p(t), \end{cases}$$

fonctions principales relatives à λ_1.

Si un zéro de degré p de $\mathrm{D}(\lambda)$ est considéré comme p zéros distincts, on peut dire qu'*une paire de fonctions principales correspond à chaque zéro de* $\mathrm{D}(\lambda)$.

Les fonctions principales relatives à λ_1 satisfont aux équations (37). Elles constituent donc *un système biorthogonal.*

Si maintenant, on écrit l'une des équations (32)

$$\int_a^b \varphi_2(s,\tau)\,\varphi_1(\tau,t)\,d\tau = \int_a^b \varphi_1(s,\tau)\,\varphi_2(\tau,t)\,d\tau = \varphi_2(s,t)$$

on voit que φ_2 est solution d'une équation intégrale où le noyau $\varphi_1(s,t)$ est de la forme (38) étudiée au n° **6**, 2°, p. 45. D'où l'on déduit que φ_2 est de la forme

$$\varphi_2(s,t) = \sum a_{ik}\,\varphi_i(s)\,\psi_k(t)$$

où les a_{ik} sont certaines constantes. On verra de même que

$$\varphi_3(s,t),\ \ldots,\ \varphi_r(s,t)$$

sont d'une forme analogue. Dans un travail récent [1], M. Lalesco a montré comment en effectuant une substitution biorthogonale convenable sur (39), on peut réduire la résolvante à une forme canonique.

Il y a lieu de ne pas confondre le système des fonctions principales (39), avec celui des fonctions fondamentales définies selon M. Schmidt au n° **43**, p. 110 ; non plus qu'avec le système des $2q$ solutions des équations intégrales homogènes associées. Toutefois, on démontre facilement que ces dernières fonctions sont des combinaisons linéaires des $2p$ fonctions principales (on a vu au n° **25**, p. 81, que $q \leqslant p$). Dans le cas où le pôle est simple ($r = 1$) on démontre même que ces deux systèmes de fonctions coïncident. Ce résultat est, en tout cas, évident pour nous quand le noyau est symétrique.

---

[1] *Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. 39, 1911, p. 95.

BIBLIOGRAPHIE

Les travaux relatifs aux équations intégrales sont à l'heure actuelle extrêmement nombreux. Nous ne signalerons ici que quelques-uns des plus importants, tant au point de vue historique qu'au point de vue de sujets qui n'ont pu être abordés dans le corps du présent volume.

I. *Théorie de l'équation en elle-même*

FREDHOLM, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (Ofr. Kongl. Vet. Ak. Förh. Stockholm, 1900).

— *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Math., 27, 1903.

HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Göttinger Nachrichten, math. phys. Klasse, 1904–1908, Heft. I–VI.

SCHMIDT, *Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener*, Math. Annalen, 63.

PLEMELJ, *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung*, Monatshefte für Math. u. Physik, XV, 1904.

GOURSAT, *Recherches sur les équations intégrales linéaires.* Ann. Faculté Toulouse, 1908.

En ce qui concerne les conditions de continuité et le champ de validité de la théorie, on pourra consulter

LEBESGUE, *Bulletin Soc. Math. de France*, t. XXXVI, 1908.

F. RIESZ, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris* du 8 avril 1907.

Dans un certain nombre de travaux, l'équation de Fredholm est envisagée au point de vue de la théorie des fonctions :

J. SCHUR, *Math. Annalen*, t. LXVI, 1900, p. 508.

H. POINCARÉ, *Acta Mathematica*, t. III, 1910.

L'étude de la résolvante a été entreprise par

HEYWOOD, *Thèse*, Paris 1908 et *Journal de Math.*, t. VI, 1908.

LALESCO, *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XXXIX, 1911, p. 95.

La méthode de Hilbert par le moyen de la théorie des formes quadratiques infinies a été développée par

Hilb, *Habilitationsschrift*, Erlangen, 1908.
Hellinger, *Dissertation*, Göttingen, 1907.
Weyl, *Dissertation*, Göttingen, 1908.
Hellinger u. Tœplitz, *Nachrichten zu Göttingen*, 1906, 1907.

et exposée plus en détail par

Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie.*

Pour l'équation de première espèce, voir outre les travaux de Volterra

Lalesco, *Journal de Math.* 1908.
Levi Civita, *Atti Ac. Sc. Torino*, t. XXXI, 1895–96.
Hilbert, *Grundzüge* (voir plus haut).
Kellogg, *Math. Ann.*, t. LVIII.
Poincaré, *Sechs Vorträge*, Leipzig, Teubner, 1910.
Picard, *C. R. Ac.* 14, 18 juin 1909. *Rendic. Circ. Palermo*, t. XXIX, p. 73–97.
Bateman, *Proc. London Math. Soc.*, série 2, t. IV, *Transactions of the Cambridge Phil. Soc.*, t. XX. *Math. Ann.*, t. LXIII.
Lauricella, *Rendic. Ac. Lincei*, t. XVII, p. 175, 1908; t. XVIII, p. 71, 1909; t. XIX, pp. 250 et 521, 1910.

On trouvera aussi des applications de l'équation de Fredholm à la théorie des équations différentielles ordinaires et en particulier aux fonctions de Sturm-Liouville dans les mémoires de Hilbert et de Stekloff.

Au point de vue historique, il semble que la première résolution d'une équation intégrale de première espèce soit due à Abel (*Journal de Crelle*, t. I, p. 153, ou *Œuvres*, t. I, p. 97) qui y avait été amené par une généralisation du problème de la tautochrone. Liouville rencontra une équation intégrale de seconde espèce en étudiant l'équation différentielle $y''_x + \rho^2 y = f(x)$. Enfin avant Fredholm des équations du type de Volterra furent étudiées en même temps par Volterra, *Ann. di mat.* (2), 25, p. 139 et Le Roux, *Ann. Ec. Normale* (3), 12, p. 244.

II. *Applications à la physique mathématique*

Avant la résolution de l'équation de Fredholm, M. Poincaré, avait introduit la notion de fonctions fondamentales dans son mémoire «*Sur les équations de la Physique mathématique*», Rendiconti Palermo, 1894 et dans les *Acta Mathematica*, t. XX, 1896.

Voir sur ce sujet :

STEKLOFF, *Théorie générale des fonctions fondamentales*, Annales Faculté Sc. Toulouse (2), 6, 1904, Annales de l'Ecole Normale, 1902.

C. NEUMANN, *Logarithmische und Newtonsche Potential*, 1877, Leipzig, Teubner.

Pour les applications de l'équation de Fredholm à la Physique, voir plusieurs mémoires de M. PICARD, dans les *Annales de l'Ecole normale*, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910 et dans les *Rendiconti de Palerme*, 1906, t. XXII et 1910, t. XXIX, ainsi que :

FREDHOLM, *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité.* Archiv für Matematik, 1905.

BOGGIO, *R. Acc. dei Lincei*, 1907, 1908.

LAURICELLA, *R. Acc. dei Lincei*, 1906, 1907, 1908, *Annali di Matematica*, 1907 (Sur le refroidissement des corps).

HADAMARD, *Mémoire couronné par l'Académie des sciences*, 1908.

POINCARÉ, *Sechs Vorträge.* Teubner, Leipzig, 1910.

Citons encore les expositions générales suivantes.

HANS HAHN, *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen*, *Jahresbericht der Deutschen Mat. Verein.*, Bd. 20, 1911.

KNESER, *Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der Math. Physik*, Brunswick, Vieweg und Sohn, 1911.

Egalement une exposition élémentaire dans le livre de

M. BÖCHER, *Introduction to the study of integral equations*, Cambridge, 1909.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

CHAPITRE PREMIER

PROBLÈMES SE RAMENANT A L'ÉQUATION DE FREDHOLM

---

[1] Les titres en petits caractères correspondent aux sections qu'on peut laisser de côté à une première lecture.

CHAPITRE II

L'ÉQUATION DE FREDHOLM

CHAPITRE III

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES POSÉS DANS LE CHAPITRE PREMIER

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE

